ESAME DI STATO 2003 SECONDA PROVA SCRITTA PER IL LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a. Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b. Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto tra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto tra i volumi di T e T'.

c. Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d. Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e. Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$.

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a. Determinare il suo dominio di derivabilità.

b. Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

c. Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnare il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O(x, y)$, dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

1. Dopo aver fornito la definizione di «rette sghembe», si consideri la seguente proposizione: «comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, a due a due distinte, se x e y sono sghembe e, così pure, sono sghembe y e z, allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Un piano interseca tutti gli spigoli di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A però è possibile accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare la distanza PB, è tuttavia possibile misurare al distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

4. Il dominio della funzione $f(x) = \ln\left\{\sqrt{x+1} - (x-1)\right\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

(A) $-1 < x \leq 3$ (B) $-1 \leq x < 3$ (C) $0 < x \leq 3$ (D) $0 \leq x < 3$

5. La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6. La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: $1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$ moltiplicarli combinandoli a due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

(A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; (B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; (C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; (D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

8. x e y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

A) è divisibile per 2 e per 3
B) è divisibile per 2 ma non per 3
C) è divisibile per 3 ma non per 2
D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibile cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore. Era consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

a. Sia A l'area di ogni faccia, quindi $S = 4A$. Unendo il centro della sfera inscritta con i vertici del tetraedro si ottengono quattro piramidi di base A ed altezza r. Si può scrivere allora:

$$V = 4 \cdot \frac{1}{3} Ar = \frac{1}{3} Sr.$$

Una relazione analoga vale per ogni poliedro circoscrivibile ad una sfera.

b. Si può partire dal triangolo CHD dove H è il punto medio di AB (fig. 1). Siano D' e C' i centri delle facce CAB e DAB rispettivamente; $D'H = C'H = CH/3$ per un noto teorema sul baricentro di un triangolo.

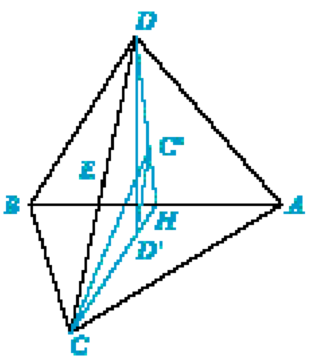

Figura 1

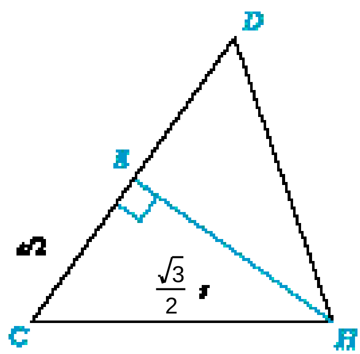

Figura 2

Per ricavare lo spigolo $D'C'$ di T', osserviamo che, per l'inverso del Teorema di Talete, $C'D'$ risulta parallelo a CD; sfruttando la similitudine fra i triangoli HCD ed $HC'D'$, si conclude: $C'D' = \frac{CD}{3}$. Il rapporto di similitudine tra i due tetraedri è allora 1/3, e così:

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{27}.$$

c. La distanza richiesta è la lunghezza del segmento EH che congiunge i punti medi degli spigoli CD ed AB: infatti, per motivi di simmetria, EH è perpendicolare ad entrambi gli spigoli.
È possibile determinare EH applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CEH (fig. 2), dopo aver notato che $CE = s/2$ e $CH = \sqrt{3}s/2$. Si trova

$$EH = \frac{\sqrt{2}}{2}s.$$

d. Posta l'origine del sistema di riferimento in H, con l'asse x coincidente con la retta AB e l'asse y passante per E (fig. 3), si ha: $A\left(-\frac{s}{2},0\right)$, $B\left(\frac{s}{2},0\right)$, $E\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$.

L'equazione della parabola è della forma $y = ax^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}s$; imponendo il passaggio per A si ottiene (fig. 3):

$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}s.$$

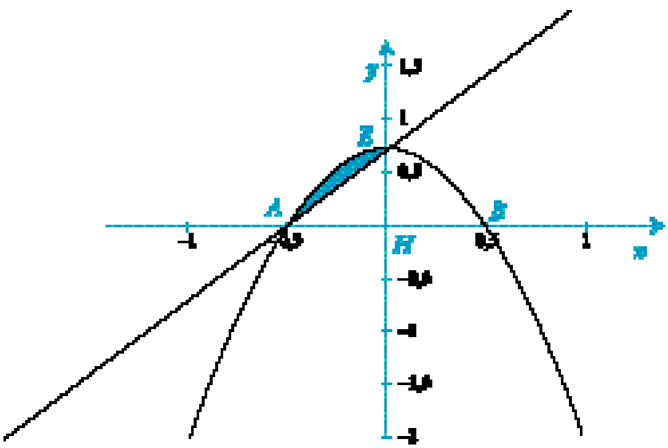

Figura **3** – Il grafico si riferisce al caso s = 1

e. La retta EA ha equazione $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}s$. L'area è data da:

$$\int_{-s/2}^{0}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)dx-\int_{-s/2}^{0}\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)dx=\int_{0}^{-s/2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2+\sqrt{2}x\right)dx=\frac{\sqrt{2}}{24}s^2.$$

Alternativamente, si può applicare il teorema secondo cui l'area del segmento parabolico ABE è uguale a 4/3 dell'area del triangolo ABE: se ne deduce rapidamente che l'area considerata è 1/6 dell'area del triangolo ABE.

Dalla condizione della domanda si ha: $\frac{\sqrt{2}}{24}s^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^2$, e quindi $s = 2\sqrt{2}$ cm.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

a. La funzione si può scrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2} & \text{per } m \le 0 \\ \dfrac{2x+1}{x^2+2m} & \text{per } m > 0 \end{cases}$$

e la sua derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x^2+2x}{x^4} & \text{per } m \le 0 \\ \dfrac{-2x^2-2x+4m}{\left(x^2+2m\right)^2} & \text{per } m > 0 \end{cases}$$

Si ha pertanto $D = R - \{0\}$ per $m \le 0$, mentre $D = R$ per $m > 0$. Il dominio della derivata coincide con quello della funzione.

b. Basta considerare solo il secondo caso: $f'(1) = 0$ quando $-2-2+4m = 0$: quindi $m = 1$.

c. Per $m = 1$ si ottiene $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$. La funzione assume valori positivi per $x > -1/2$, si annulla in $x = -1/2$, interseca l'asse y in $(0,\ 1/2)$, e ha l'asse x come asintoto orizzontale essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Ponendo $m = 1$ nella derivata già trovata, si ottiene: $f'(x) = \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}$.

La funzione risulta crescente per $-2 < x < 1$, ha un massimo e un minimo assoluto nei punti (–2, –1/2) e (1, 1) rispettivamente, è decrescente altrove. Il grafico è tracciato in figura 4.

La derivata seconda è: $f''(x) = \dfrac{4x^3+6x^2-24x-4}{(x^2+2)^3}$. Per trovare *quanti* sono i flessi, occorre stabilire quanti sono gli zeri del polinomio al numeratore: $g(x) = 2(2x^3 + 3x^2 - 12x - 2)$. Quest'ultimo polinomio rappresenta una cubica con un massimo relativo in –2 e un minimo relativo in 1; siccome il valore è positivo nel massimo e negativo nel minimo, la cubica di equazione $y = g(x)$ ha 3 punti di intersezione con l'asse delle x e, dunque, il grafico di $f(x)$ ha 3 flessi.

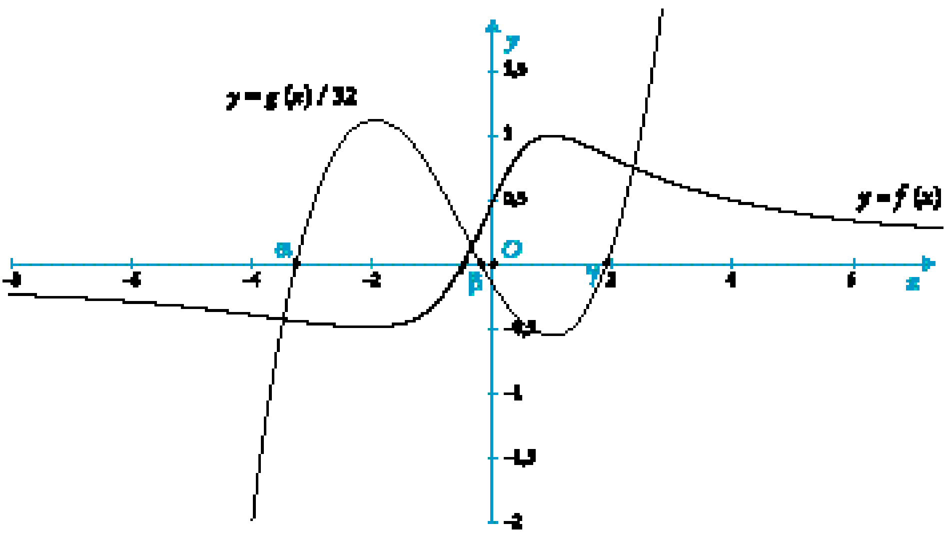

Figura **4** – In figura è riportato l'andamento della funzione f (x) con sovrapposto il grafico di g (x)/32; α, β, γ sono i valori delle ascisse dei punti di flesso

d. Il grafico di γ interseca l'asse x nel punto di ascissa –1/2; quindi l'area richiesta è:

$$A = \int_{-1/2}^{1} \frac{2x+1}{x^2+2}\,dx = \int_{-1/2}^{1} \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \left[\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-1/2}^{1} \approx 0.96\,.$$

RISPOSTE AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

1. Due rette si dicono sghembe quando non sono complanari. Per rispondere basta esibire un caso (*controesempio*) in cui non vale la transitività per la relazione «essere sghembe». Si considerino due rette incidenti x, z, e si conduca una retta y che sia incidente al piano xz in un punto non appartenente né ad x né a z, allora la retta y risulta sghemba sia ad x che a z, ma x e z non sono, per costruzione, sghembe tra loro.

2. Indichiamo con $ABCD$ il quadrato di base e con V il vertice della piramide. Se si escludono casi banali (come il piano ACV), un piano non può intersecare *tutti* gli spigoli della piramide: riteniamo perciò che l'estensore intendesse riferirsi solo agli spigoli *laterali*. Escludiamo dunque che il piano passi per V, e supponiamo che intersechi in A', B', C', D' rispettivamente gli spigoli AV, BV, CV, DV.
La sezione è sempre un quadrilatero *convesso* (perché intersezione di figure convesse). I casi particolari di interesse sono:

a. Il piano è parallelo ad un lato del quadrato di base, per fissare le idee al lato AB (fig. 5); allora i punti A' e B' si trovano alla stessa quota, come pure i punti C' e D'; i lati $A'B'$ e $C'D'$ sono paralleli, mentre $B'C'$ e $A'D'$ sono uguali: la sezione è un *trapezio isoscele*.

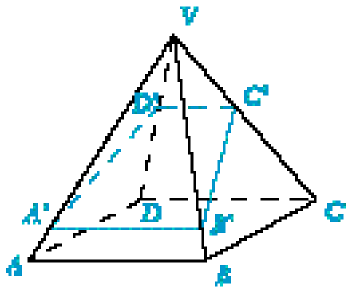

Figura 5

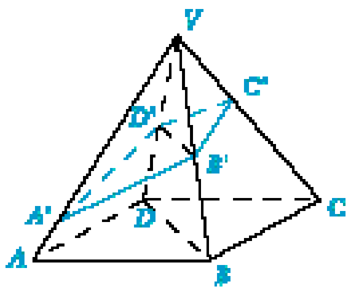

Figura 6

b. Il piano è parallelo ad una diagonale per fissare le idee alla diagonale DB (fig. 6); allora D' e B' si trovano alla stessa quota. Si ottiene un *deltoide* con diagonale maggiore $A'C'$.

c. Il piano è parallelo alla base della piramide; allora A', B', C', D' si trovano tutti alla stessa quota e la sezione (per ovvii motivi) è un *quadrato*.

3. Possiamo immaginare che i punti A e P stiano da un lato di un fiume, invalicabile, e che il punto B stia dal lato opposto. Siamo muniti degli strumenti necessari per misurare l'angolo in A del triangolo ABP (se da P si può vedere A, allora da A si può vedere P; anche se, a rigore, la proprietà simmetrica per la relazione «x vede y» non è immediata, c'è alla base una ben definita teoria ottica). Misuriamo anche l'angolo in P ed il lato AP. L'angolo in B si calcola facilmente (per fortuna siamo in geometria euclidea), e così si può applicare il teorema dei seni al triangolo ABP:

$$\frac{AP}{\operatorname{sen} B} = \frac{AB}{\operatorname{sen} P}.$$

4. Si tratta di risolvere il sistema di disequazioni formato dalle condizioni di esistenza per il logaritmo e la radice:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Con i consueti metodi algebrici (e la dovuta attenzione), si trova che la risposta corretta è (B).
Per interpretare geometricamente la situazione, si confrontano i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x - 1$: le soluzioni sono gli intervalli in cui il grafico di f è «al di sopra» del grafico di g.
Una tecnica cui ricorrere nei «casi disperati» è sfruttare il modo in cui è formulato il quesito, escludendo le risposte scorrette per farne restare una sola. La risposta giusta non può essere né (A) né (C) né (D) poiché $x = -1$ appartiene al dominio di $f(x)$.

5. Per rispondere è opportuno studiare brevemente la cubica, tenendo ben presente che si tratta di una funzione continua. Il discorso presenta analogie con il punto c) del Problema 2: la cubica ha un massimo relativo in 0 e un minimo relativo in 1; siccome i valori assunti in corrispondenza a 0 e ad 1 sono entrambi positivi, si conclude che la curva interseca l'asse x in un solo punto di ascissa negativa (fig. 7).

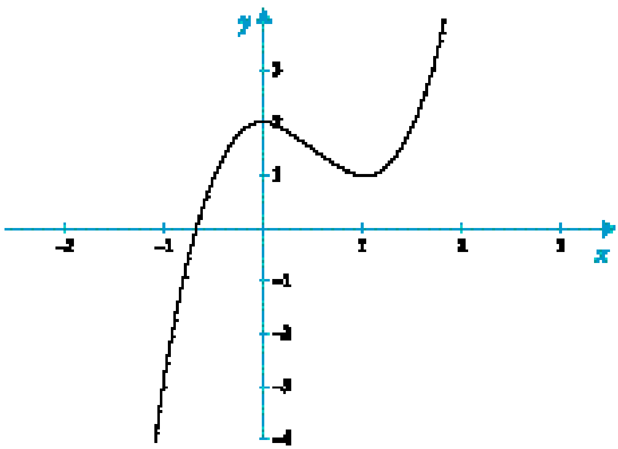

Figura 7

6. Sia $g(z) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ e sia $z = h(x) = x^2$. Allora $f(x)$ è la funzione composta

$f(x) = g(h(x))$, la cui derivata è $f'(x) = D[g(h(x))] = g'(z)\,h'(x)$.

Ora, $g'(z) = e^{-z^2}$ e $h'(x) = 2x$, da cui $f'(x) = 2x \cdot e^{-z^2} = 2x \cdot e^{-x^4}$.

7. Il quesito si presta ad (almeno) due interpretazioni:

1. i prodotti coinvolgono anche un numero con se stesso, cioè compaiono le coppie del tipo (n, n). In quest'ottica, pare di dover considerare anche l'ordine nelle coppie, accettando, per esempio, sia il prodotto $1 \cdot 2$ sia il prodotto $2 \cdot 1$;
2. i prodotti riguardano solo coppie di numeri diversi, ciascuna considerata una sola volta.

Purtroppo la soluzione non scioglie l'ambiguità poiché le due interpretazioni hanno la risposta corretta, rispettivamente (A) e (D). Pertanto proponiamo le soluzioni in entrambi i casi.

Caso 1. La somma dei prodotti si può scrivere così:

$$(1+2+\ldots+n)\cdot(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

e la risposta esatta è (A).

Caso 2. Si tratta di togliere, da quanto ottenuto nel caso 1, i quadrati dei numeri da 1 ad n, e di dividere il risultato per 2. Ricordiamo che si dimostra per induzione che:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

da cui si deduce che la somma richiesta è

$$\frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right] = \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2).$$

La seconda interpretazione può forse sembrare più aderente al testo, in cui si usa la parola «*combinando*». In tal caso il quesito è decisamente difficile e viene naturale, come abbiamo già fatto per il quesito 4, cercare di rispondere per esclusione. Per esempio: se $n = 2$ la somma dei prodotti è 2, allora (A) e (C) sono false; se $n = 3$ la somma dei prodotti è 11, allora (B) è falsa. Dunque è vera (D).

8. Scomponendo: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, si vede immediatamente che il numero è divisibile per 2, così sono escluse (C) e (D). Nel caso di $x = 2$ ed $y = 1$, il numero è 8, che non è divisibile per 3; allora la risposta corretta non può essere che (B).
Una soluzione più convincente si ottiene scrivendo i due numeri dispari come $2n-1$ e $2n+1$:

$$(2n+1)^3 - (2n-1)^3 = 2(12n^2+1)$$

che è sempre divisibile per 2 ma mai per 3.
Aggiungiamo che l'indicazione che x ed y sono dispari è ininfluente.

9. Poiché i numeri del Lotto sono 90 e due (1 e 90) sono fissi, si tratta di calcolare il numero delle combinazioni semplici (l'ordine non conta) di $90 - 2 = 88$ oggetti a 3 a 3:

$$C_{88,3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3 \cdot 2} = 109\,736.$$

10. L'affermazione è vera: si tratta di un caso particolare del teorema

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Per dimostrare la relazione data, basta applicare la definizione di logaritmo

$$x = \log_2 3 \leftrightarrow 2^x = 3 \quad \text{ed} \quad y = \log_3 2 \leftrightarrow 3^y = 2.$$

Da $$2^{xy} = (2^x)^y = 3^y = 2$$
si conclude $$xy = 1.$$
Oppure, si può applicare la regola del cambio della base:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = 1.$$

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Come è stato osservato da più parti, la presenza di quesiti di varia tipologia nella prova permette agli studenti di dimostrare meglio le conoscenze acquisite e le competenze raggiunte: anche i meno «portati» trovano domande cui rispondere in modo dignitoso.

Tale novità, dopo una prima fase di disagio, ha indotto gli insegnanti ad adattare la propria didattica al nuovo tipo di richieste, con cui è più facile verificare la comprensione dei singoli concetti (in un problema non si può «saltare» da un argomento all'altro, come invece è possibile fare con una serie di quesiti distinti).

La prova scritta di matematica verifica le conoscenze dell'intero triennio (ma anche del biennio); questa circostanza è dovuta alla natura strettamente sequenziale della disciplina. D'altra parte, va rilevato che il curricolo dell'ultimo anno è costruito su concetti difficili e profondi, che richiedono tempo e impegno da parte sia degli insegnanti che degli studenti, e ci sembra giusto che su questi concetti venga verificata la preparazione degli studenti.

Da qualche anno gli estensori dei temi «spingono» verso la geometria solida (in questa prova: il Problema 1 ed i Quesiti 1, 2). Sicuramente, molti di noi mancano nel non trattare con cura la geometria solida, confidando su reminiscenze delle Scuole medie e su un uso più o meno consapevole di formule per volumi e superfici (quel tanto che basta per i problemi di massimo e minimo). Qualche anno fa i temi orientavano, invece, verso le trasformazioni, e molti di noi insegnanti, volentieri, hanno proposto agli studenti forti dosi di trasformazioni.

Ora, a noi pare che orientare l'azione didattica verso questo e quello non facilita la concentrazione sugli argomenti profondi e difficili dell'ultimo anno. Inoltre, le richieste non sembrano ben calibrate: le prime due domande del Problema 1 appaiono al di là delle capacità degli studenti, mentre nel Quesito 2 la richiesta è abbastanza generica (si doveva dare una dimostrazione rigorosa e completa, oppure ci si poteva limitare a dire che: «si vede dalla figura»?).

Il Problema 2 appare appropriato per mettere alla prova la preparazione degli studenti, anche se presenta qualche punto critico, come lo studio della derivata seconda o soprattutto il calcolo dell'integrale. In definitiva, il Problema 2 ha permesso agli studenti di mostrare le loro capacità e ha offerto a chi corregge elementi per differenziare la valutazione.

Nel Quesito 3 si tratta di modellizzare una situazione concreta, ma allora forse sarebbe stato meglio parlare esplicitamente di un fiume. Alcuni studenti hanno erroneamente pensato che, poiché B era visibile sia da A che da P, allora era possibile misurare direttamente l'angolo in B.

I Quesiti 5 e 6 sono gli unici che riguardano concetti di analisi. Probabilmente solo pochi studenti si sono cimentati con il Quesito 6, un'applicazione non certo banale del Teorema di Torricelli-Barrow.

Il Quesito 7, se risolto in modo diretto, richiede la conoscenza di «tanta» aritmetica: è indispensabile la conoscenza delle formule per la somma dei primi n naturali (formula di Gauss) e per la somma dei primi n quadrati, e occorrono anche abilità di manipolazione. Crediamo di poter affermare, in tutta serenità, che la soluzione di questo quesito non era alla portata della maggioranza dei nostri studenti.

Dopo un lungo periodo ricompaiono domande sul calcolo combinatorio (Quesito 9). L'argomento è presente nei programmi ministeriali, ma è così staccato dal resto del curricolo che molti colleghi non lo affrontano affatto. Forse l'idea degli estensori dei temi è che il calcolo combinatorio è importante perché prelude alla probabilità, ma allora sarebbe meglio introdurre esplicitamente la probabilità nei curricoli. Non vorremmo però che l'argomento venisse ritenuto indispensabile per consentire di giocare consapevolmente al Lotto. Naturalmente, c'è un solo modo per giocare in modo consapevole al gioco del Lotto: non giocarci affatto.

Nel Quesito 10, alcune soluzioni dipendono unicamente dalla memoria dello studente, che può aver ricordato qualche formula sui logaritmi appresa in terza o quarta; il che giustifica l'accanimento ministeriale nel proibire l'uso di formulari.

Pietro Cacciatore
Giuliana Zucchi

Liceo Scientifico Statale
«Ippolito Nievo» – Padova
zucchi.g@tin.it