

ESAMI DI STATO: LA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA NEL LICEO SCIENTIFICO

PREMESSA

Nell'esame conclusivo del liceo scientifico è sempre stata presente la prova scritta di matematica. Dall'istituzione di tale ordine di studi (anno 1923) fino al 1968, l'esame prevedeva la prova scritta su tutte le materie per le quali lo scritto era presente nel piano di studi. La matematica, nel liceo scientifico, era tra queste. La legge di riforma del '69 riduceva le prove scritte a due, delle quali la seconda da scegliere fra alcune materie indicate per ciascun indirizzo da un'apposita tabella. Per il liceo scientifico, ovviamente, tra queste era la matematica che, di fatto, è stata sempre proposta fino alla successiva riforma del '97. Quest'ultima ha innalzato a tre le prove scritte e ha stabilito che la seconda deve vertere su una materia tra quelle caratterizzanti l'indirizzo di studi, per cui le norme d'ordinamento (o contenute nei decreti d'autorizzazione per i corsi sperimentali) prevedono prove scritte con valutazione formale.

Per il liceo scientifico d'ordinamento, l'unica disciplina che soddisfa a tali criteri è la matematica che, pertanto, è stata assegnata negli esami di Stato del giugno 1999 e 2000. Lo stesso è avvenuto per i corsi sperimentali del Progetto PNI, mentre per il Progetto Brocca ad indirizzo scientifico e ad indirizzo scientifico-tecnologico, oltre alla matematica, è stata scelta la fisica.

La struttura delle prove di matematica proposte dal 1971 in poi ⁽¹⁾ fino al 2000 è stata, seppure con qualche variante, sempre la stessa: 3 o 4 problemi entro cui il candidato doveva risolverne alcuni. Al candidato veniva fatto inizialmente il seguente tipo di richiesta: «Su 4 problemi il candidato risolve quelli che ritiene più adeguati alla propria preparazione», oppure «Su 4 problemi il candidato ne risolve almeno 2 a sua scelta». Ciò creava naturalmente problemi di soggettività nella valutazione dell'elaborato. Negli ultimi anni tale richiesta ha assunto contorni più precisi.

In tutte le proposte, in ogni caso, le prove di matematica consistono in problemi con più domande.

(1) Nell'esame di maturità del 1970 fu proposto un solo problema con più domande.

LA NUOVA PROPOSTA

Nell'ottobre del 2000 il Ministero, ritenendo inadeguata la struttura tradizionale della prova, ha dettato nuove disposizioni in merito. Esse saranno applicate a partire dal giugno 2001.

Il testo proposto sarà costituito *da due problemi, articolati al loro interno in almeno tre quesiti, possibilmente indipendenti tra loro, e da un questionario contenente altri quesiti (da un minimo di 6 ad un massimo di 10) riguardanti argomenti del programma. La tipologia delle questioni è tale da offrire al candidato la più ampia opportunità per esprimere conoscenze, competenze e capacità acquisite nel corso di studi. Il candidato è tenuto a risolvere uno dei due problemi proposti a scelta e circa ⁽²⁾ la metà dei quesiti del questionario.*

La durata della prova è stata portata per tutti gli indirizzi scientifici a 6 ore, ma resta in vigore la norma che consente durante la prova l'uso delle sole calcolatrici non programmabili.

Nel seguito, per maggiore chiarezza, chiameremo «domande» le varie parti in cui si articola un problema e «quesiti» le singole parti del questionario. Problemi e quesiti – affermano le disposizioni – saranno predisposti *in stretta coerenza con il piano di studi seguito e saranno impostati e formulati in modo agile e snello, al fine di rendere più agevole la scelta da parte del candidato. L'articolazione delle questioni sarà ispirata al criterio di una complessità graduale ed a quello di una non necessaria indipendenza tra loro.*

Non è prevista un'attribuzione di punteggio da parte del Ministero ai singoli quesiti del questionario e alle domande dei problemi, essendo la definizione dei criteri per la valutazione delle prove competenza esclusiva della Commissione d'esame. Per maggiori dettagli sulle nuove disposizioni ministeriali, rimandiamo alla pagina Internet http://www.istruzione.it/news/2000/nes00_01_matematica.htm

ALCUNE CONSIDERAZIONI

A fianco dei problemi, che, per loro natura, hanno spesso aspetti di complessità e di concatenazione che possono mettere in difficoltà i candidati non particolarmente brillanti in matematica, sono stati introdotti i quesiti singoli. Sono inoltre precisati il numero minimo di domande nel problema e il numero minimo e massimo di quesiti, e ciò cui è tenuto a rispondere il candidato. Acquistano in precisione tanto la proposta che gli estensori della prova possono presentare quanto la risposta che viene richiesta al candidato.

Gli obiettivi della modifica apportata sembrano essere quelli, principalmente, di consentire:

⁽²⁾ Riteniamo probabile che il numero sia precisato nell'ambito della prova.

– a tutti i candidati di svolgere un’onesto prova di matematica a fronte di un serio impegno di studi;

– ai commissari di effettuare una «misura» il più oggettiva possibile della prestazione del candidato.

Pensiamo che, affinché la prova risponda effettivamente agli obiettivi suddetti, debbano essere osservati alcuni criteri che cercheremo di esplicitare in forma concisa, augurandoci di essere comprensibili, senza, tuttavia, alcuna pretesa d’esaustività.

1) Un candidato che ha risposto positivamente alle domande di un problema ed ai quesiti nel numero richiesto, ha diritto al *massimo del punteggio*, cioè a 15 punti.

Poiché la scelta del candidato è libera, riteniamo che gli *indici di difficoltà*, tanto fra i due problemi, quanto fra i quesiti del questionario, debbano essere pressoché uguali. Se così non fosse, sarebbe difficile un’oggettività nella «misura» della prova. Non è, in altri termini, docimologicamente corretto attribuire, in uno stesso contesto, la stessa valutazione (stesso punteggio) a prove che richiedono prestazioni differenti.

Sull’*indice di difficoltà* sono opportune alcune considerazioni. Concorrono a determinare l’*indice di difficoltà* (di un problema o di un quesito) i tempi (necessari ad assimilare l’enunciato, ad individuarne la collocazione e nel programma svolto in classe e nel percorso di preparazione individuale) e le capacità, concettuali e tecniche, di approccio, di svolgimento, di soluzione e di verifica della prova. Questi fattori sono altamente soggettivi, variabili da studente a studente, da classe a classe, da scuola a scuola.

Tuttavia, pur nella piena consapevolezza della complessità del discorso, riteniamo sia necessario cercare di individuare problemi e quesiti con *indice di difficoltà*, rispettivamente tra loro, omogenei.

2) I quesiti proposti non devono essere problemi più brevi, ma domande ed esercizi. L’intento della nuova proposta non è, come intendiamo sottolineare, rendere la prova più difficile del passato, ma offrire a tutti i candidati la possibilità di svolgerla, almeno parzialmente.

Affrontare un problema richiede, rispetto a uno specifico quesito, un maggior tempo di assimilazione, ma, una volta fatto proprio l’argomento, il candidato ha di fronte solo difficoltà tecniche e concettuali ben delimitate. Invece, aver a che fare con i quesiti vuol dire, per lo studente, avere una più ampia possibilità di scelta, ma al contempo dover decidere quali fra essi sono i più congeniali alla propria preparazione.

Questa offerta diversificata risponde al diritto di autonomia esercitabile da ciascuna scuola nell’approntare i curricoli; essa va incontro anche a quei candidati che hanno approfondito gli argomenti «a macchia di leopardo», cioè non tutti nello stesso modo.

Problemi e quesiti dovranno, perciò, spaziare su tutti gli aspetti fondamentali del programma, senza investire, tuttavia, argomenti troppo particolari o marginali. Riteniamo, anche, che in ogni problema le domande debbano essere di varia difficoltà, possibilmente crescente nella progressione delle stesse. Può essere opportuna, ma certamente non indispensabile, l'indipendenza. Nel questionario, invece, i quesiti *dovranno* naturalmente essere indipendenti.

3) Le dimostrazioni dei teoremi visti nella teoria non dovranno far parte, come tali, né dei quesiti né dei problemi.

Esse spingono generalmente alla memorizzazione, per non dire alla copiatura dal libro, e trovano peraltro migliore collocazione nel colloquio. È bene, invece, chiedere dimostrazioni, anche semplici, ma riferite a situazioni particolari (vedi ad esempio il quesito 2 del Questionario A ed il quesito 3 del Questionario B).

4) Si dovranno fornire tutte le formule che possono servire. L'esame non deve essere una prova di memoria e, come accade nelle analoghe prove della maggior parte dei paesi europei, si dovrebbe consentire l'uso di formulari, di libri di testo, di calcolatrici (anche programmabili, grafiche e simboliche). La conoscenza e la padronanza dei libri e dello strumento di calcolo e di programmazione non sono elementi di secondo piano nella valutazione complessiva della preparazione del candidato. In tal senso riteniamo, perciò, che le norme dettate vadano riviste.

5) È opportuno proporre anche domande e quesiti aperti (vedi ad esempio il quesito 8 del Questionario A), puntando sulla creatività e sull'inventiva dello studente, nonché domande che si prestino a più strategie risolutive. La proposizione di quesiti meccanici o esclusivamente di calcolo non dà una buona valutazione delle capacità di analisi e di sintesi del candidato (si ricordi che questa prova era, non a torto, chiamata di maturità).

LA VALUTAZIONE DELLA PROVA

Le prove di matematica conclusive del ciclo di studi secondari, proposte in vari paesi europei, sono costituite da più questioni, spesso articolate in varie domande; il candidato deve scegliere e risolvere alcune di tali questioni. Il punteggio massimo attribuibile alla prova, stabilito dall'Ufficio che gestisce gli esami (Ministero dell'Educazione, Examination Board, ecc.) è suddiviso, da parte degli estensori della prova, tra le domande poste ed è comunicato ai candidati, all'inizio dell'esame, all'interno del testo. Si gioca, in altri termini, a carte scoperte: il candidato sa quale punteggio consegue se risponde a determinate domande. Per rendere chiaro il meccanismo, riportiamo la formula di una prova in un esame *A-level* di matematica (prova sostanzialmente equivalente a quelle di cui stiamo parlando) proposto in Inghilterra:

«Il candidato risponda a 7 quesiti scelti tra quelli proposti, di cui non più di 4 quesiti di una sezione».

I quesiti proposti sono 15, ripartiti equamente in 3 sezioni:

- Matematica pura
- Probabilità e statistica
- Fisica.

Ogni quesito è strutturato su 3 o 4 domande e ad esso sono attribuiti 14 punti, suddivisi tra le varie domande in relazione al loro indice di difficoltà. Ad esempio, il primo quesito di matematica pura del testo considerato contiene 3 domande cui sono attribuiti nell'ordine 6, 5, 3 punti, con somma, ovviamente, 14.

Il candidato che risponde positivamente a tutte le domande di 7 quesiti qualsiasi, purché non più di 4 di una sezione, consegue 98 punti.

Il criterio d'attribuzione di punteggio usato nell'esempio appare abbastanza *oggettivo* e può dare utili suggerimenti alle nostre commissioni d'esame, nonostante da noi non sia possibile, come nella situazione inglese, comunicare ai candidati, *prima* della prova, i punteggi assegnati a domande e quesiti. Alle commissioni, infatti, e non al Ministero, compete la definizione dei criteri di valutazione delle singole prove, nell'osservanza di quanto le norme prescrivono: 15 punti come punteggio massimo (Legge n. 425/97) e 10 punti alla prova ritenuta *sufficiente* (DPR n. 323/98).

Nel nostro caso, poiché il candidato deve risolvere uno dei due problemi e metà dei quesiti proposti, avendo libertà di scelta, appare docimologicamente corretto, in coerenza con l'omogeneità tra gli *indici di difficoltà* di cui si è detto prima, attribuire lo stesso punteggio a ciascuno dei due problemi e così pure a ciascuno dei quesiti; ciò non significa che il punteggio assegnato al problema debba coincidere con la somma dei punti dei quesiti richiesti al candidato.

La commissione d'esame dovrebbe pertanto, prima della correzione, decidere quanti punti vale la soluzione di un problema e quanti uno dei quesiti, con l'intesa che, se k è il punteggio di un problema, la somma dei punti dei quesiti nel numero richiesto deve essere $15 - k$. Il punteggio k va suddiviso tra le domande del problema a seconda delle difficoltà di ciascuna risposta.

Sarebbe opportuno tener anche presenti alcuni descrittori nell'assegnazione complessiva del punteggio - *pieno, parziale o nullo* - a ciascuna risposta (domande del problema e quesiti) data dal candidato. Tra questi citiamo, ad esempio, i seguenti:

- correttezza del procedimento;
- completezza della risposta;
- correttezza dei calcoli;
- spiegazione del procedimento seguito;
- chiarezza d'esposizione;
- originalità del procedimento.

Riteniamo che la valutazione della prova, secondo i criteri indicati, sia sufficientemente oggettiva. Ovviamente si può pervenire ad un totale che è un numero decimale; in tal caso, poiché la normativa consente l'assegnazione di soli punteggi interi, occorrerà effettuare un'approssimazione per difetto o per eccesso.

Restano aperti ancora alcuni problemi:

- con i criteri indicati, il punteggio di una prova «sufficiente» potrebbe non pervenire necessariamente a 10 come la norma richiede;
- può creare difficoltà la valutazione di un elaborato in cui le risposte fornite non osservano le richieste generali (ad esempio, un elaborato in cui sono state affrontate domande di entrambi i problemi o in cui sono stati considerati quesiti in numero maggiore del richiesto).

Una proposta che facilita la soluzione del primo caso (anche se comporta una modifica delle decisioni iniziali) consiste nel normalizzare a 10 punti la valutazione di un elaborato che ha raggiunto la sufficienza e, in conseguenza, modificare gli altri punteggi. Il candidato che ha conseguito, per merito proprio, 15 punti, sarebbe in tal modo penalizzato; la situazione è però recuperabile nell'ambito dei 5 punti che la commissione ha facoltà di attribuire nello scrutinio finale.

In merito al secondo caso, la commissione si trova a dover scegliere fra due alternative:

- a) invitare i candidati ad indicare il problema ed i quesiti che la commissione deve valutare;
- b) valutare *tutte* le risposte fornite, in quanto espressione dei livelli di conoscenze e capacità del candidato.

La scelta a) appare più aderente alle disposizioni generali, anche se seguendo la seconda strada si ottengono punteggi più elevati; naturalmente è opportuno che la commissione dichiari a priori ai candidati la scelta che intende fare.

PROPOSTA ESEMPLIFICATIVA PER LA PROVA SCRITTA DEL NUOVO ESAME DI STATO

Formuliamo alcune proposte di prove per un liceo sperimentale, presentando due problemi e due questionari in modo da «costruire» due compiti, intrecciando la coppia di problemi con ciascuno dei due gruppi di quesiti. Pensiamo che l'indice di difficoltà dei due problemi sia più o meno lo stesso, e che analoga situazione accada per ciascuno dei due questionari (nel senso che, all'interno di ogni questionario, i quesiti si possano ritenere equivalenti).

La frequenza delle varie tematiche nei programmi ci ha suggerito di inserire tre o quattro quesiti di analisi matematica, uno o due di probabilità o statistica, uno di algebra, tre di geometria (di cui uno di geometria sintetica del piano o dello spazio, uno sulle trasformazioni geometriche e uno di geometria analitica),

uno o due di informatica (con la richiesta di scrivere un programma in un linguaggio conosciuto).

I quesiti del Questionario A presentano, a parere di chi scrive, un indice di difficoltà (per cinque qualsiasi di essi) complessivamente paragonabile a quello di ciascuno dei due problemi successivi. Pertanto, riteniamo di assegnare un punteggio globale di 7.5 punti per il problema e di 1.5 punti per ciascun quesito. Nel caso dell'accoppiata Questionario B e Problemi riteniamo invece, sempre a nostro sindacabile giudizio, che l'indice di difficoltà di cinque quesiti sia complessivamente superiore a quello di ciascuno dei due problemi. Potremo, ad esempio, assegnare 6 punti per il problema e 9 punti per i quesiti (ovvero 1.8 punti per ciascun quesito scelto dal candidato). Al termine di ciascuno dei due problemi indicheremo anche una valutazione dettagliata per le singole domande del problema.

Precisiamo inoltre, senza specificarlo volta per volta, che *tutte* le risposte vanno motivate.

Questionario A

1. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} e^{x+y} = 12, \\ e^{x-y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

2. Il parallelogramma $ABCD$ ha per punti medi dei lati i punti E, F, G, H e, a sua volta, il quadrilatero $EFGH$ ha per punti medi dei lati i punti I, L, M, N . Si dimostri che i quadrilateri $EFGH$ e $ILMN$ sono parallelogrammi e che il perimetro di $ILMN$ è la metà di quello di $ABCD$.

3. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot x^2 & \text{per } x \text{ tale che } |x| < 2 \\ 2.5 & \text{per } x \text{ tale che } |x| = 2 \\ 3 & \text{per } x \text{ tale che } |x| > 2 \end{cases}$$

Indicare gli eventuali punti di discontinuità.

4. Dire se la trasformazione

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$$

lascia unita la curva di equazione $x^2 + y^2 = 9$, e se lascia unita la parabola di equazione $y = x^2$.

5. Da un ordinario mazzo di 52 carte si estrae una carta X , la si rimette nel mazzo, si mescolano di nuovo le carte, e si estrae una seconda carta Y . Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

$$A = \{X \text{ è una carta di cuori ed } Y \text{ un Re}\}$$

$$B = \{X \text{ è una figura ed } Y \text{ un Asso}\}$$

Calcolare poi la probabilità dei due eventi nel caso in cui la carta non venga rimessa nel mazzo.

6. Consideriamo la funzione $f(x) = x - \cos x$; osserviamo preliminarmente che $f(0) < 0$, $f(\pi/2) > 0$. Il candidato costruisca, in un linguaggio conosciuto, un programma che individui una radice di $f(x) = 0$ con un errore più piccolo di 0.1.

7. Il candidato determini i valori reali dei numeri a_1, a_2, a_3 per i quali l'equazione $x^2 + y^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0$ rappresenta una circonferenza. In corrispondenza a tali valori, trovi centro e raggio della circonferenza.

8. È data una funzione $f(x)$ la cui derivata prima $f'(x)$ ha per grafico, in un riferimento cartesiano ortogonale, una retta passante per l'origine e non coincidente con gli assi cartesiani. Il candidato faccia le considerazioni che ritiene opportune sull'andamento del grafico della funzione $f(x)$.

9. Avvalendosi della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente), si determini il valore della derivata della funzione $f(x) = 1/x$ nel punto di ascissa $x = 7$.

10. In una prova a quiz, con votazioni da 1 a 5, Andrea, Beppe, Carlo, Diana, Elsa hanno ottenuto rispettivamente 3, 1, 4, 4, 2 punti. Si calcoli la media dei punti ottenuti e se ne determini la mediana: si facciano anche considerazioni in proposito ai valori trovati. Si calcoli poi la deviazione standard dalla media e si dica chi, con una percentuale di circa il 67%, è da considerarsi «fuori media».

Problemi

Problema 1

Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \text{ tale che } x < 2 \\ x - 3 & \text{per } x \text{ tale che } x > 3 \end{cases}$$

Il candidato dica:

- se essa è continua nel suo dominio;
- se esiste una funzione $h(x)$ che è un prolungamento continuo della funzione data $f(x)$ su tutta la retta reale (cioè se esiste una funzione continua $h(x)$ che abbia per dominio \mathbb{R} e che coincida con $f(x)$ nel dominio di quest'ultima);



- quanto vale $\int_{-1}^2 f(x) dx$;
- in quale insieme è definita la funzione $t(y) = f(g(y))$ se $x = g(y) = y^2 - 1$; disegni inoltre il grafico di $t(y)$ e calcoli la derivata prima $t'(y)$.

Commento. Come detto all'inizio, a questo problema possono essere assegnati globalmente 7.5 punti qualora accoppiato con il precedente Questionario A. In tal caso una possibile ripartizione del punteggio fra le varie domande del problema, tenendo conto delle difficoltà, è la seguente: 1 punto alla prima domanda, 1.5 punti alla seconda, 2 punti alla terza e 3 punti alla quarta. Si ricorda che avevamo stimato in punti 1.5 il punteggio da attribuire ad ogni quesito. Nel caso dell'accoppiata con il Questionario B, avendo attribuito 6 punti al problema, i punteggi da assegnare alle quattro domande andranno poi ricalcolati proporzionalmente.

Problema 2

Al SuperQuiz un candidato può decidere di andarsene col premio $f(n)$ guadagnato dopo aver risposto esattamente alla n -sima domanda, o raddoppiare nel caso di un'ulteriore risposta positiva. Dopo la prima domanda ha già guadagnato 25 euro. Il candidato dovrà:

- esprimere, in caso di proseguimento del gioco, $f(n+1)$ in funzione di $f(n)$;
- calcolare $f(n)$ in funzione di n , determinando in particolare il valore di $f(6)$;
- dire quante risposte esatte occorre dare per guadagnare 102 400 euro;
- scrivere, in un linguaggio conosciuto, un programma che affronti la questione precedente.

Commento. Analogamente a quanto detto a proposito del problema precedente, in questo secondo problema possono essere attribuiti 1.5 punti alla prima domanda e 2 punti a ciascuna delle altre domande nel caso dell'accoppiata con il Questionario A, ed in modo proporzionale al totale di 6 punti nel caso il problema venga affiancato al Questionario B.

Questionario B

1. Calcolare il limite L della funzione $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ per x tendente a $+\infty$ e dire per quali valori di x si ha una differenza minore di 0.001 fra L ed i corrispondenti valori della funzione.

2. In una linea ferroviaria i treni sono composti da 1 vettura di prima classe e da 4 vetture di seconda classe; in una seconda linea ferroviaria i treni sono composti da 2 vetture di prima classe e da 3 vetture di seconda classe. Avendo le Ferrovie costruito 500 vetture di prima classe e 1700 vetture di seconda classe, quanti treni, per le due linee, si riescono a comporre usando tutte le vetture?

3. Un treno parte dalla stazione di Ancona ed arriva alla stazione di Bologna coprendo la distanza fra le due stazioni alla velocità (media) di 80 km/h. Dal teorema di Lagrange segue che, durante il viaggio, c'è un momento in cui la velocità (istantanea) del treno è di 80 km/h. Spiegare il perché.

4. Calcolare il volume di una piramide triangolare regolare, sapendo che l'angolo al vertice di una faccia laterale è retto e che il raggio del cerchio circoscritto ad una faccia laterale è r .

5. Si lancia un dado perfetto e si guadagnano 10 euro se esce un numero più piccolo di 3 e si perdono 6 euro se esce il numero 3 o un numero più grande di 3. Supponendo di aver iniziato a giocare con 100 euro, quanto si prevede di avere a disposizione, in media, dopo 10 partite?

6. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $A = (1, 1)$ e $B = (2, 2)$. Si determinino, se esistono, le traslazioni, le rotazioni, le simmetrie assiali che lasciano uniti i due punti.

7. Dire per quali valori della variabile x si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ e, dopo aver fissato uno di questi valori (sia esso a_0), costruire, in opportuno linguaggio, un programma che individui un valore di n tale che a_0^n differisca dal limite per meno di 10^{-9} .

8. Dire se esistono valori del parametro α per i quali le ascisse dei punti di intersezione tra l'asse delle ascisse e le parabole della famiglia espressa da $y = x^2 + x + \alpha$ sono maggiori di α .

9. Determinare gli eventuali valori della variabile x tali che $2 \sin(x) = 5x^2 + 2x + 3$.

10. Sia f una funzione reale di variabile reale continua per $x = 0$. Dire se la funzione $F(x) = k f(x)$, con k numero reale, è limitata in un opportuno intorno di $x = 0$.

GIUSEPPE ANICHINI
Dipartimento di Matematica Applicata
Università di Firenze

LUCIA CIARRAPICO
Ministero Pubblica Istruzione – Roma

