

ESAME DI STATO 2007 SECONDA PROVA SCRITTA PER I LICEI SCIENTIFICI A INDIRIZZO SPERIMENTALE (PNI E BROCCA)

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in \mathbf{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{f(x)} dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \rightarrow \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\frac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

PROBLEMA 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $\hat{C}AB$ si mantenga doppio dell'angolo $\hat{A}BC$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C .
2. Si rappresenti γ , tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $\hat{A}BC$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $\hat{A}BC = 36^\circ$, allora $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolvibile o meno.
2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x , con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2} .
3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.
4. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ , σ , σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

5. Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto $(1, 2)$.
8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».
9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1. La derivata di g è $g'(x) = a^x \ln a - a^{-x} \ln a = (\ln a)(a^x - a^{-x})$. Se $a > 1$, si ha $\ln a > 0$ e quindi $g'(x)$ è positivo quando $a^x - a^{-x} > 0$, cioè per $x > 0$. Se $0 < a < 1$, si ha $\ln a < 0$ e quindi $g'(x)$ è positivo quando $a^x - a^{-x} < 0$, cioè per $x < 0$. In entrambi i casi, quindi, g è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. Si può anche osservare che g è pari e limitare così lo studio al caso $x > 0$ ovvero $x < 0$.

2. La funzione $f(x) = e^x + e^{-x} = 2\cosh x$ ha dominio \mathbf{R} ed è pari; il grafico si può ottenere elementarmente come somma di funzioni note (figura 1).

Caratteristiche salienti: passaggio per $(0, 2)$, che corrisponde al punto di minimo assoluto, nessuna intersezione con l'asse x , funzione ovunque positiva che tende a $+\infty$ per $x \rightarrow \infty$, nessun asintoto, concavità sempre rivolta verso l'alto.

L'andamento del grafico di $1/f(x)$ si può dedurre elementarmente dal grafico di $f(x)$ (figura 2). Caratteristiche salienti: dominio \mathbf{R} , funzione sempre positiva, passaggio per $(0, 1/2)$, che corrisponde al punto di massimo assoluto, asse x asintoto orizzontale, crescita e decrescenza «scambiate» rispetto a $f(x)$.

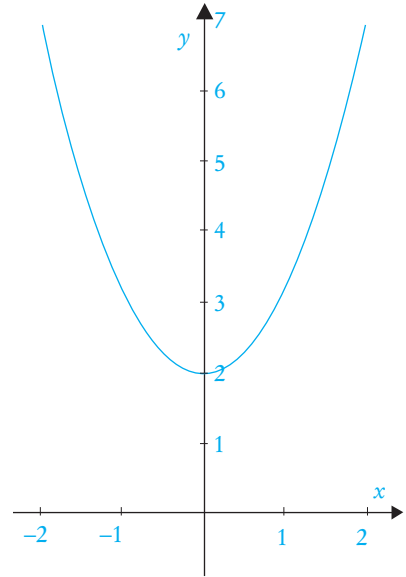


Figura 1

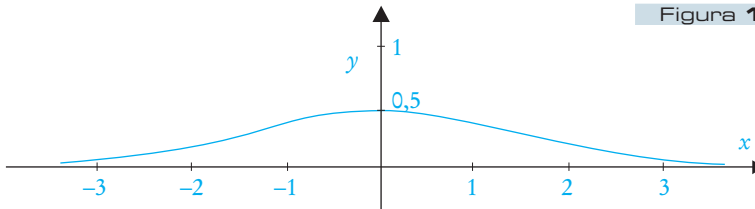


Figura 2

Per determinare i punti di flesso è invece necessario uno studio diretto della funzione. Annullando la derivata seconda, si trova l'equazione $e^{2x} + e^{-2x} - 6 = 0$, che si risolve ponendo $e^{2x} = z$: si trova $x = \ln \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2} \pm 1)$.

3. Con la sostituzione $e^x = y$ si ottiene

$$\int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^t \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int_1^{e^t} \frac{dy}{y^2 + 1} = [\arctg y]_1^{e^t} = \arctg e^t - \frac{\pi}{4}; \text{ inoltre}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\arctg e^t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Il valore ottenuto rappresenta l'area sottesa alla curva per $x > 0$. Si osservi che l'area risulta finita anche se la regione considerata è illimitata.

4. La domanda non è del tutto chiara. Si può approssimare l'integrale considerato al punto 3 con rettangoli e trapezi, ma il calcolo di $1/f(x)$ richiede l'uso di una calcolatrice e la conoscenza del valore di e . Oppure, dato che $\arctg 1 = \pi/4$ e che $\arctg 1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ si può ottenere un valore approssimato di $\pi/4$ sempre con il metodo dei rettangoli o dei trapezi. O ancora, si può ricorrere allo sviluppo di Taylor per $\arctg x$, ritrovando la formula di Gregory-Leibniz storicamente utilizzata proprio per approssimare π : $\arctg 1 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Si rinvia alla risoluzione della prova per il Liceo Scientifico di ordinamento.

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. Si rinvia alla risoluzione della prova di ordinamento.
 2. Il volume si ottiene facendo la somma integrale dei rettangoli aventi area $3(\ln x)^2$; quindi $V = \int_1^e 3(\ln x)^2 dx$. Una doppia integrazione per parti fornisce

$$\int (\ln x)^2 dx = (x \ln x - x) \ln x - \int (x \ln x - x) \frac{1}{x} dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c.$$

Si conclude $V = 3(e-2)$. Per quanto riguarda il valore approssimato richiesto, si rimanda ai commenti finali.

Si veda anche il primo quesito della prova di ordinamento.

3. Ricordiamo che si definisce *omotetia* di centro C e rapporto a (numero reale diverso da 0) la funzione nel piano che ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che $CP' = a CP$. Si osserva che la composizione tra omotetie di centro O è ancora un'omotetia di centro O e che il rapporto è il prodotto dei rapporti. L'associatività è quindi assicurata dalle proprietà dei numeri reali (il prodotto tra reali è associativo). Per quanto riguarda l'elemento neutro e il simmetrico (o inverso), si tratta rispettivamente dell'omotetia di rapporto 1 e di quella di rapporto $1/a$.
4. La funzione proposta è la funzione *densità di probabilità* della variabile normale o di Gauss, con μ valor medio, σ^2 varianza e σ scarto quadratico medio della variabile aleatoria. L'importanza di tale funzione è dovuta, tra l'altro, al fatto che bene approssima la densità di probabilità di molte variabili aleatorie empiriche. Un esempio classico è fornito dalle misure di una grandezza fisica soggetta a errori accidentali (si parla, infatti, anche di curva degli errori accidentali).

Relativamente al grafico, μ rappresenta il punto di massimo, $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$ sono i punti di flesso, σ determina lo «schiacciamento» della curva. Con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si ottiene la cosiddetta normale standard, molto usata in statistica.

5. Il teorema è equivalente al V postulato di Euclide, quindi non è valido nelle geometrie non-euclidee che sono caratterizzate dalla sostituzione del V postulato con la sua negazione.

In geometria iperbolica il teorema diventa «in un triangolo la somma degli angoli interni è minore di un angolo piatto». Una rappresentazione è quella del modello di Poincaré, in cui il piano è la parte interna ad un cerchio, le rette sono diametri o archi di circonferenza interni ortogonali al cerchio.

In geometria ellittica «in un triangolo la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto». Un modello che la rappresenta si ottiene considerando come piano una superficie sferica e come rette le circonferenze massime della superficie sferica. In realtà, ciò non è del tutto corretto perché bisogna «identificare» i punti diametralmente opposti (si veda ad esempio Hilbert e Cohn-Vossen, *Geometria intuitiva*, ed. Bollati Boringhieri pag. 304 e seguenti).

Per ottemperare la richiesta di accompagnare la spiegazione con un disegno, un'idea può essere quella delle figure 3 (geometria iperbolica) e 4 (geometria ellittica).

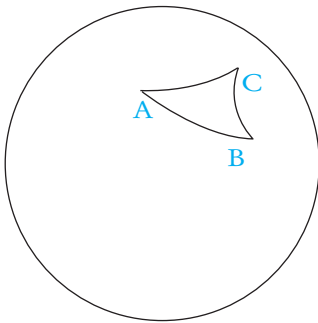


Figura 3

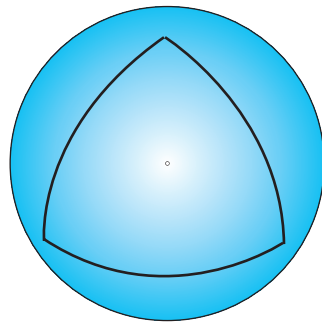


Figura 4

6. Il punto P del triangolo (figura 5) non deve trovarsi in nessuno dei settori circolari di ampiezza $\pi/3$ e raggio unitario individuati dai tre vertici. La somma delle tre aree è uguale all'area di un semicerchio di raggio unitario, vale quindi $\pi/2$. L'area della regione in cui può trovarsi il punto equivale alla differenza tra l'area del triangolo equilatero $\left(A = \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ e l'area del semicerchio. La probabilità richiesta è data dal rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili: si ha perciò

$$p = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} \approx 0,59.$$

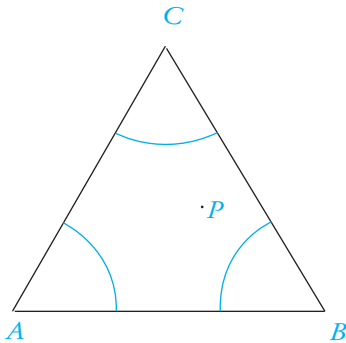


Figura 5

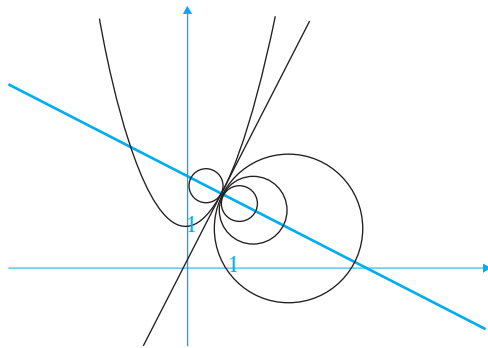


Figura 6

7. Due curve sono tangenti in un punto se e solo se sono tangenti in quel punto alla stessa retta. Il procedimento più rapido consiste nell'osservare che il luogo richiesto è la perpendicolare alla retta tangente alla parabola nel punto di tangenza (figura 6). Poiché il coefficiente angolare della tangente nel punto è 2, il coefficiente della perpendicolare vale $-1/2$; quindi il luogo richiesto ha equazione

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

In alternativa si possono utilizzare i fasci di circonferenze.

8. Indicando con x, y, z le somme in possesso dei tre giocatori all'inizio, la situazione è riassunta nella seguente tabella.

Alla fine della I partita	$x - y - z$	$2y$	$2z$
Alla fine della II partita	$2(x - y - z)$	$3y - x - z$	$4z$
Alla fine della III partita	$4(x - y - z)$	$2(3y - x - z)$	$7z - x - y$

Dato che alla fine delle tre partite ciascun giocatore ha 24 luigi si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, la cui unica soluzione fornisce $x = 39$, $y = 21$, $z = 12$.

Alternativamente, si poteva seguire un procedimento a ritroso. Se alla fine ciascuno ha 24 luigi, dopo la II partita il primo e il secondo giocatore avevano 12 luigi (metà di 24) e quindi il terzo 48. Di conseguenza, dopo la I partita il primo giocatore aveva 6 luigi, il terzo 24 e quindi il secondo 42. Infine, si trova che, all'inizio, il secondo aveva 21 luigi, il terzo 12 e quindi il primo 39.

9. La funzione è continua in \mathbf{R} ; inoltre si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ pertanto esiste sicuramente almeno uno zero. Inoltre la derivata prima è sempre positiva e quindi la funzione è strettamente crescente nel dominio: lo zero è unico. Per approssimare lo zero, osservato ad esempio che $f(-1/2) = 2 > 0$ ed $f(-1) = -5 < 0$ si può procedere con il metodo di bisezione o con altre tecniche (secanti, tangenti, ...) per ottenere la precisione richiesta. Si ricava così $x \approx -0,67$.

10. Ogni piano del fascio di piani contenente l'asse di rotazione r interseca la superficie della sfera S lungo una circonferenza massima, passante per i punti in cui l'asse r interseca la sfera (*poli*). Un arco di *meridiano* è costituito da ciascuna delle semicirconferenze individuate dai poli.

I *paralleli* sono le sezioni del fascio di piani perpendicolari a r con la superficie di S . Il parallelo ottenuto con il piano del fascio passante per il centro della sfera prende il nome di *equatore*. Per ogni punto P della superficie di S passa un solo meridiano e un solo parallelo.

La *latitudine* di un punto P rappresenta la sua altezza rispetto all'equatore: si tratta dell'angolo avente vertice nel centro della Terra, che giace su un piano che contiene l'asse r , ha un lato passante per P e l'altro per un punto dell'equatore. La latitudine si misura in gradi da 0° a 90° e si considera positiva se settentrionale o boreale, negativa se meridionale o australe. La *longitudine* di un punto P rappresenta la sua distanza da un meridiano convenuto (Greenwich): si tratta dell'angolo diedro di asse r e con le facce una passante per P e l'altra per il meridiano di Greenwich (in modo sostanzialmente equivalente, si tratta dell'angolo avente vertice nel centro della Terra, che giace sul piano dell'equatore, ha un lato passante per un punto del meridiano di P e l'altro per un punto del meridiano di Greenwich). La longitudine si misura in gradi da 0° a 180° , si considera positiva se il punto è ad est del meridiano di riferimento, negativa se è ad ovest. Il punto P è individuato dalla coppia di coordinate costituite da latitudine e longitudine.

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Il primo problema è coerente col programma dell'ultimo anno del corso di studi, calibrato e ben articolato nelle richieste (anche se un po' laborioso in qualche calcolo); lascia tuttavia perplessi il quarto punto, peraltro simile al decimo quesito della prova di ordinamento 2006. Nel quesito però si indicava con chiarezza il procedimento da seguire per ottenere l'approssimazione, mentre in questo caso si cerca una sorta di continuità col punto precedente del problema; manca inoltre un'indicazione sulla precisione richiesta.

Il secondo problema comprende quasi per intero argomenti della classe terza; è curiosa poi la richiesta di approssimare con la calcolatrice il risultato del terzo punto in gradi e primi, stante anche la consuetudine di usare i radianti.

Vari quesiti si riferiscono ai programmi degli anni precedenti (n. 1, 3, 6, 8).

Nel secondo quesito il volume richiesto si calcola col metodo «delle fette», che di norma, nella pratica scolastica, è usato per ottenere la formula che fornisce i volumi di solidi di rotazione e raramente come metodo a sé stante; non è chiara la richiesta di approssimare il risultato (stavolta con l'indicazione precisa «a meno di 10^{-2} »), dato che l'integrale si risolve con metodi esatti: fornire un'approssimazione con la calcolatrice sembra troppo banale, applicare tecniche per approssimare il numero e

appesantirebbe in modo eccessivo il quesito, che già richiede una doppia integrazione per parti.

Il quarto, settimo e nono quesito sono standard e facilmente eseguibili.

Il quinto quesito si presta, almeno nelle prime richieste, a risposte di tipo nozionistico, a meno che il termine spiegazione non sottintenda dimostrazioni, che però non sembrano alla portata dello studente e rischiano di trasformare la risposta ad un quesito in una trattazione. L'ulteriore richiesta di accompagnare la spiegazione con il disegno anziché aiutare lo studente, come immagino fosse nelle intenzioni, complica notevolmente il problema. L'unica possibile risorsa sembra il ricorso a modelli non euclidei, ma soprattutto per la geometria ellittica molti testi scolastici o non forniscono esempi o danno informazioni incomplete.

Il primo e l'ottavo quesito e i loro rimandi alla storia della matematica, pur interessanti a livello teorico, sembrano avulsi dal contesto, e si prestano a banalizzazioni (il primo) o sono effettivamente facili (l'ottavo).

Il decimo quesito, pur sicuramente attinente alla matematica, riguarda argomenti svolti in geografia.

Restano alcune perplessità di ordine generale:

- a) probabilmente è necessaria una riflessione su che cosa si vuole dai temi d'esame: credo non sia il caso di preoccuparsi che i temi siano «belli» (magari per gli addetti ai lavori), ma che siano funzionali allo scopo: l'accertamento del livello di preparazione degli studenti alla fine del corso di studi;
- b) sarebbe estremamente utile avere qualche criterio generale di valutazione, soprattutto per individuare il livello di sufficienza, e una traccia delle soluzioni per definire con chiarezza le risposte attese, anche per uniformare i giudizi delle diverse commissioni;
- c) resta la difficoltà per l'insegnante nel dover proporre «tutto lo scibile» per consentire uno svolgimento agevole dei temi. Purtroppo, dato il tempo a disposizione limitato, questo rischia di trasformarsi nella trattazione affrettata e superficiale di molti argomenti, mentre sembrerebbe più ragionevole trattare un numero minore di argomenti, ma in modo più accurato, ed effettuare eventuali approfondimenti, magari proprio di carattere storico.

Afra Gecele

Liceo Scientifico «P. Liroy» di Vicenza
afragecele@libero.it

NOTA DELLA REDAZIONE. Viste le discussioni che hanno seguito i temi assegnati quest'anno, nei prossimi numeri di *Archimede* si discuteranno esempi e proposte di problemi e quesiti adatti per l'esame di Stato.