ESAME DI STATO 2006, SECONDA PROVA SCRITTA PER I LICEI SCIENTIFICI SCIENTIFICI DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a. Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b. la somma delle due aree sia minima?
c. la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di un parallelepipedorettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di *50 cm*^{2}, margini superiore e inferiore di *4 cm* e margini laterali di *2 cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[\,0, 1\,]$? Se sì, trova il punto ξ che compare nella formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

8. La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10. La funzione $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Durata massima della prova 6 ore. È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

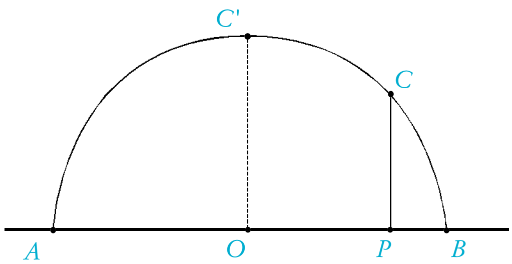

Figura 1

a. Si disegni una semicirconferenza di diametro $AB = \lambda/2$, si prenda su AB un punto P (figura 1); pensiamo AP e PB come le due dimensioni dell'aiuola rettangolare. Si tracci la perpendicolare ad AB passante per P: essa interseca la semicirconferenza nel punto C. Per il secondo teorema di Euclide $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$: di conseguenza l'area è massima quando è massimo PC, cioè quando $PC = OC' = AP = PB$. Questa è una dimostrazione elementare del fatto che il prodotto di due termini a somma costante è massimo quando essi sono uguali e, allo stesso tempo, che la media geometrica di due numeri positivi è minore o al più uguale alla media aritmetica (segnaliamo, in proposito, due puntate della rubrica *Dimostrazioni senza parole* curata da Franco Conti: Archimede n. 2 del 2001, pag. 108, e n. 3 del 2001, pag. 162; si veda anche la rubrica *Dimostrazioni... che lasciano senza parole* a pag. 216 di questo fascicolo).
Un altro procedimento, probabilmente seguito dalla maggioranza degli studenti, è il seguente. Si indica con $\lambda/2$ il semiperimetro di un rettangolo e con x un suo lato; l'altro lato è $\lambda/2 - x$ e di conseguenza l'area del rettangolo è
$A = x \cdot \left(\frac{\lambda}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{\lambda}{2} x$ (con $0 \le x \le \lambda/2$). L'ultima formula rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso; con le tecniche della geometria analitica o dell'analisi si trova che A assume il valore massimo quando $x = \lambda/4$, e dunque quando il rettangolo è un quadrato e la sua area vale $A = \lambda^2/16$.

b. Ora dividiamo il filo di lunghezza λ in due parti: una di misura x, l'altra di misura $\lambda - x$. Con la prima costruiamo una circonferenza di raggio $r = \frac{x}{2\pi}$ e quindi di area $A_C = \frac{1}{4\pi} x^2$, con l'altra parte un quadrato di area $A_Q = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2 = \frac{\lambda^2 - 2\lambda x + x^2}{16}$.
La somma S delle aree delle due figure è:

$$S = \frac{1}{4\pi} x^2 + \frac{\lambda^2 - 2\lambda x + x^2}{16} = \frac{4+\pi}{16\pi} x^2 - \frac{\lambda}{8} x + \frac{\lambda^2}{16} .$$

Si tratta ancora una parabola, ma con la concavità rivolta verso l'alto e con il minimo in $x_{min} = \frac{\pi}{4+\pi}\lambda$. Si conclude che $A_{min} = \frac{1}{4(4+\pi)}\lambda^2$.

c. Per quanto riguarda il massimo vi è da osservare che S è funzione continua in tutto R e pertanto anche nell'intervallo chiuso $I = [0, \lambda]$. Perciò, per il teorema di Weierstrass assume in I valore minimo e valore massimo: abbiamo trovato il minimo nel vertice che cade all'interno di I, il massimo (per le caratteristiche della funzione quadratica) si avrà in uno dei due estremi di I. Si calcola facilmente $S(0) = \lambda^2/16$ ed $S(\lambda) = \lambda^2/(4\pi)$: il secondo valore è maggiore del primo (perché $\pi < 4$) e quindi l'area massima si ha quando l'aiuola risulta composta della sola parte circolare.
A rigore, si potrebbe discutere se la soluzione trovata è accettabile: in effetti, nel testo si dice che «Si pensa di tagliare il filo in due parti», e questa frase si può interpretare nel senso che si devono effettivamente ottenere *due* parti. In tal caso, occorre considerare l'intervallo *aperto* $]0, \lambda[$, dove la funzione S non ammette massimo. Riteniamo che, a livello di valutazione degli elaborati, la risoluzione precedente vada comunque considerata pienamente corretta; e che vada ugualmente considerata corretta questa seconda risposta (probabilmente indicata da pochi studenti).

Il volume di un parallelepipedo è dato da $V = a \cdot b \cdot c$ se con a, b, c indichiamo le misure degli spigoli. Ora, se ciascuna di esse aumenta del 10%, il nuovo volume è

$$1{,}1a \cdot 1{,}1b \cdot 1{,}1c = 1{,}1^3\, a \cdot b \cdot c$$

e il rapporto tra i due volumi risulta $1{,}1^3 = 1{,}331$, dunque con un aumento pari al 33,1%. Volendo approssimare $1{,}1^3$, si potrebbe usare la formula $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, ottenendo un aumento di circa il 30%.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Per i punti 1 e 3 si rinvia alla risoluzione della prova per i Licei Scientifici ad indirizzo sperimentale.

2. Posto $a = 1$, dobbiamo calcolare l'area delimitata dalle due curve nell'intervallo da 1 a 2. Tenendo presente che, in tale intervallo, $f(x) < g(x)$, si ha:

$$\int_1^2 (x^2 - \log x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\log x + x\right]_1^2 = \frac{10}{3} - \log 4$$

Si ricordi che una primitiva di $\log x$ si calcola usando la tecnica «per parti».

I quesiti 1, 2, 5, 6 *e* 9 *corrispondono ai quesiti, con lo stesso numero, della prova per i Licei Scientifici ad indirizzo sperimentale, a cui si rinvia per la risoluzione.*

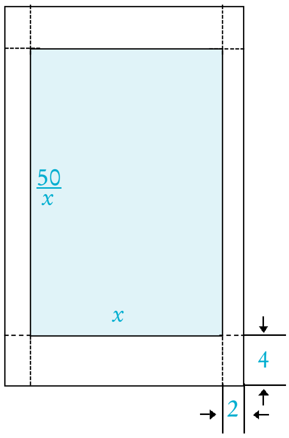

Figura **2**

3. Se indichiamo con x (con $x > 0$) la misura di un lato (larghezza) della parte stampata, ne viene che l'altro lato (altezza) misura $\frac{50}{x}$ (figura 2). Tenendo conto dei margini, l'area del foglio di carta è

$$S = \left(\frac{50}{x} + 8\right)(x + 4) = \frac{8x^2 + 82x + 200}{x}.$$

S è una funzione di x, continua e derivabile nel dominio considerato.
Di questa funzione dobbiamo ora ricercare il valore minimo. La derivata prima è

$$S' = 8 \cdot \frac{x^2 - 25}{x^2}$$

La derivata si annulla solo in $x = 5$; la funzione è decrescente per $0 < x < 5$ e crescente per $x > 5$. L'ascissa dell'unico punto di minimo è 5; le corrispondenti dimensioni del foglio sono rispettivamente 9 cm e 18 cm (e l'area del foglio è 162 cm^2).
Si noti la *similitudine* fra il foglio e la parte stampata.

4. Il diametro della sfera coincide con la diagonale d del cubo e, d'altra parte, $d = \sqrt{3}\, a$ se a indica lo spigolo del cubo.

Perciò: $$V_{cubo} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 m^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} m^3 = 0{,}19245 \quad m^3 = 192{,}45 \quad l.$$

Osservazione. Nel testo, la parola approssimazione è usata in modo… approssimato: al candidato resta la scelta del numero di cifre della risposta e della tipologia (arrotondamento o troncamento).

7. Nel teorema di Lagrange si chiede che la funzione in oggetto $f(x)$ sia derivabile in $]a, b[$ e almeno continua in $[a, b]$. La funzione data $f(x)$ è tale, poiché è combinazione lineare di funzioni continue e derivabili in tutto R. Le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte e dunque esiste in $]0, 1[$ un punto ξ tale che $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Per determinare ξ calcoliamo dapprima il coefficiente angolare della corda $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, che risulta uguale a -1; calcoliamo poi la derivata $f'(x) = 3x^2 - 4x$ e, infine, imponiamo la condizione $3x^2 - 4x = -1$. L'equazione ha due soluzioni $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = 1/3$: la seconda è interna all'intervallo e costituisce, quindi, la risposta al quesito.

In generale, naturalmente, può esistere più di un punto ξ in cui la derivata è uguale al coefficiente angolare della corda considerata: in questo senso, l'articolo «il» nel testo non sembra del tutto appropriato.

8. La funzione $f(x) = \text{tg } x$ è una funzione continua a tratti e con discontinuità non eliminabile per i multipli dispari di $\dfrac{\pi}{2}$. Nell'intervallo $I = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ cade proprio uno di tali multipli, e quindi non è applicabile il teorema degli zeri per le funzioni continue in un intervallo chiuso.

In altre parole, il fatto che la funzione assuma valore 1 in $\pi/4$ e -1 in $3\pi/4$ non garantisce che si annulli in un punto dell'intervallo.

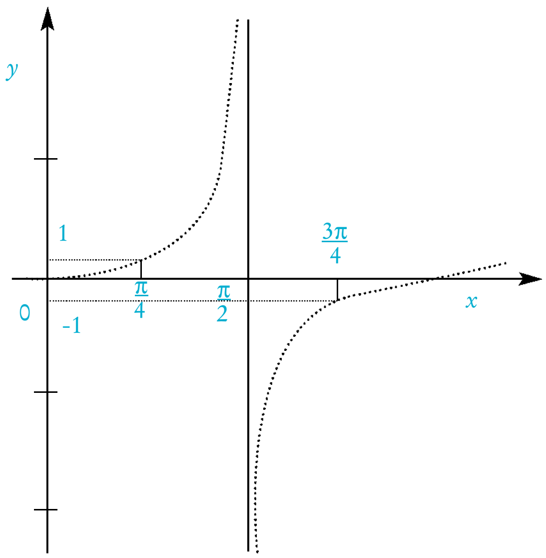

Figura 3

Considerando il grafico, si controlla immediatamente che per $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ la funzione è positiva, mentre per $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4}$ è negativa: nell'intervallo I la funzione non si annulla mai.

10. La funzione ha per dominio tutto R ed è continua e derivabile poiché combinazione lineare di funzioni continue e derivabili. Gli estremi relativi sono dunque punti in cui si annulla la derivata prima $f'(x) = a \cos x - b \sin x$. Perciò:

$f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = a\left(-\frac{1}{2}\right) - b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$, da cui $a = \sqrt{3}\, b$.

D'altra parte $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ e quindi $b = \sqrt{3}\, a - 2$.

Risolvendo il sistema formato da queste due relazioni si ottiene $a = \sqrt{3}$ e $b = 1$. Il periodo di $f(x)$ è 2π.

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Il primo problema richiede, per la sua soluzione, conoscenze di geometria elementare, di geometria analitica (in particolare a proposito della parabola) e di proprietà delle funzioni continue. L'individuazione dell'incognita è naturale, i calcoli risultano semplici.

Il secondo problema mette in relazione tra loro una funzione algebrica e una trascendente, senza però far intervenire il calcolo approssimato. Le conoscenze necessarie per risolverlo sono la geometria analitica (ancora una parabola, in forma canonica), il grafico della funzione logaritmica, la tangenza tra curve, l'integrazione per parti e la determinazione dell'area compresa tra due curve. L'esplicitazione (indiretta) del valore del parametro per la condizione di tangenza ha costituito un punto d'appoggio nella risoluzione del tema, peraltro affrontabile per blocchi indipendenti.

Nel primo quesito si richiede la determinazione della somma dei termini di una progressione geometrica e la successiva conversione del risultato. Da rilevare l'uso discutibile della parola peso e l'implicito invito rivolto agli insegnanti (e purtroppo tutt'altro che privo di senso) di occuparsi anche della matematica meno «fine» costituita dalla conversione fra diverse unità di misura.

Il secondo quesito è costituito da un bellissimo millenario risultato di geometria solida, un quesito di pura cultura generale, che apprezziamo.

Nel terzo quesito viene richiesto di risolvere un problema di minimo con una funzione razionale fratta di semplice individuazione.

Nel quarto quesito abbiamo un problema di visualizzazione spaziale sfera-cubo inscritto e, ancora, una conversione di unità di misura (secondo invito all'attenzione per la matematica «quotidiana»).

Nel quinto quesito è richiesto un caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton, che si può risolvere anche ricordando come si costruiscono i coefficienti nel triangolo di Tartaglia (la somma dei termini di una riga è doppia della somma dei termini della riga soprastante perché sono tutti contati due volte).

Nel sesto quesito dobbiamo ricordare la risoluzione di (elementari) equazioni goniometriche con discussione del parametro.

Nel settimo quesito si richiede l'applicazione del teorema di Lagrange ad una cubica.

Nell'ottavo quesito si discute la presenza di uno zero di una funzione non continua all'interno di un intervallo chiuso.

Nel nono viene richiesto di individuare, tra le funzioni elementari, quella la cui derivata è la funzione stessa. Così come formulato sembra il primo gradino, elementare e intuitivo, all'introduzione delle equazioni differenziali.

Nel decimo viene richiesta la determinazione dei parametri in una famiglia di funzioni continue e derivabili, poste una condizione su un punto stazionario ed una su un valore assunto dalla funzione cercata.

Gli studenti hanno giudicato il tema affrontabile. Se la scelta del tema riflette il preciso intento del Ministero di proporre prove «affrontabili», non si può che essere d'accordo.

Anche l'inserimento di quesiti a carattere culturale è ben accetto: risultati della Matematica che, per la loro bellezza, dovrebbero far parte delle conoscenze di ognuno, vanno giustamente valorizzati; inoltre, tali quesiti possono incontrare il favore di quegli studenti che malvolentieri formulano congetture e percorsi risolutivi di problemi, ma che apprezzano enunciati, dimostrazioni e proprietà di enti matematici.

Gli alunni dotati di spiccate abilità logico-matematiche trovano scarsi stimoli in una prova definita dalla maggior parte dei compagni «affrontabile»: si dovrebbe, perciò, studiare il modo di inserire nel tema d'esame richieste o argomenti in grado di attrarre l'attenzione e l'interesse dei più abili, senza tuttavia trasformare il tema in una gara di abilità matematica.

Mario Frison
Liceo Scientifico «G. Galilei» – Dolo (VE)
mariofrison@libero.it