

**ESAME DI STATO 2006,
SECONDA PROVA SCRITTA PER
I LICEI SCIENTIFICI A INDIRIZZO
SPERIMENTALE («PNI» E «BROCCA»)**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a. Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b. la somma delle due aree sia minima?

c. la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di un parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e .

- 1.** Si discuta, al variare di a , l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
- 2.** Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$.
- 3.** Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

QUESTIONARIO

- 1.** Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro

- sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
 3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r . Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r .
 4. Si dimostri che l'equazione $\sin x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.
 5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
 6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15^\circ < x < 45^\circ$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
 7. *Bruno de Finetti* (1906 – 1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: «che cos'è la probabilità?» era solito rispondere: «la probabilità non esiste!». Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?
 8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità 0,99 di colpirlo almeno una volta?
 9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
 10. Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Durata massima della prova: 6 ore. È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Si rinvia alla risoluzione della prova per il Liceo Scientifico di ordinamento.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1. Si richiede di discutere l'equazione $\log x = ax^2$ al variare di a . I valori di x devono appartenere al dominio comune delle due funzioni, cioè all'insieme dei numeri reali positivi. Conviene distinguere i seguenti casi: $a = 0$, $a < 0$, $a > 0$.

Nel primo caso, cioè per $a = 0$, l'equazione diventa $\log x = 0$, che ammette una ed una sola soluzione, e precisamente $x = 1$.

Per $a < 0$, poniamo $h(x) = \log x - ax^2$; la funzione $h(x)$ è continua e derivabile per $x > 0$ e si ha $h'(x) = \frac{1}{x} - 2ax > 0$ in tutto il dominio. Dunque $h(x)$ è una funzione strettamente crescente nel suo dominio e, poiché assume valori di segno opposto [si osservi che $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - ax^2) = -$ ed $h(1) = -a > 0$], essa si annulla una ed una sola volta tra 0 ed 1.

Alle stesse conclusioni si arriva confrontando direttamente i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ (si veda la figura 1) ⁽¹⁾.

Per $a > 0$, consideriamo ancora $h(x) = \log x - ax^2$ per $x > 0$. La derivata $h'(x) = \frac{1}{x} - 2ax$ è maggiore o uguale a 0 per $0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{2a}}$; dunque $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ è il punto di massimo assoluto di $h(x)$. Si osservi anche che $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{\log x}{x^2} - a \right) = -$ (visto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$).

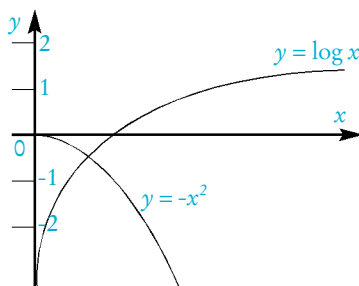


Figura 1

Il valore massimo (assoluto) di $h(x)$ è $h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = -\frac{1}{2}(\log 2a + 1)$. Se esso è positivo, cioè se $a < \frac{1}{2e}$, la funzione $h(x)$, visti i limiti agli estremi ed il segno della derivata,

⁽¹⁾ Si ringrazia il professor Mario Frison per aver collaborato all'elaborazione dei grafici.

si annulla due volte, cioè si hanno due soluzioni per l'equazione di partenza; se il valore massimo è zero, cioè se $a = 1/(2e)$, ci sono due soluzioni coincidenti; se infine il valore massimo è negativo, $h(x)$ è sempre negativa e dunque l'equazione non ha soluzioni. Graficamente, le tre situazioni relative al caso $a > 0$ sono illustrate in figura 2.

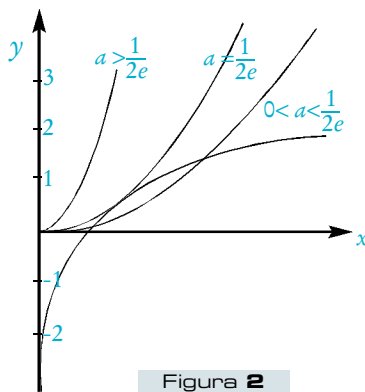


Figura 2

Riassumendo i vari casi, l'equazione $\log x = ax^2$ ammette:

- per $a = 0$ una sola soluzione;
- per $0 < a < \frac{1}{2e}$ due soluzioni distinte;
- per $a = \frac{1}{2e}$ due soluzioni coincidenti;
- per $a > \frac{1}{2e}$ nessuna soluzione.

A questo punto, è chiaro che i due grafici sono tangenti per $a = 1/(2e)$. Comunque, per rispondere direttamente alla domanda sulla tangenza, basta osservare che i grafici di $f(x)$ e di $g(x)$ sono tra loro tangenti se esiste un $x > 0$ tale che $f(x) = g(x)$ ed $f'(x) = g'(x)$. Come già visto, la seconda equazione è soddisfatta

per $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ sostituendo nella prima si ottiene $a = \frac{1}{2e}$. Per tale valore di a i due

grafici sono tangenti ed il punto di tangenza è $P\left(\sqrt{e}; \frac{1}{2}\right)$.

2. Per $a = -e^2$, i grafici delle due funzioni $f(x) = \log x$ e $g(x) = -e^2x^2$ sono rappresentati in figura 3. Le due curve si incontrano nel punto di coordinate $(e^{-1}; -1)$, punto per il quale passa anche la retta di equazione $y = -1$. La retta di equazione $y = -2$ incontra $f(x)$ in $(e^{-2}; -2)$ e $g(x)$ in $(\sqrt{2e^{-1}}; -2)$. L'area richiesta si determina sommando due integrali: ricordando che una primitiva di $\log x$ si trova integrando «per parti», con qualche calcolo si ottiene

$$\text{Area} = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} (\log x + 2) dx + \int_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}} (-e^2 x^2 + 2) dx = e^{-2} + \frac{4\sqrt{2}-5}{3} e^{-1}.$$

I calcoli si semplificano «scambiando» il ruolo degli assi x ed y , cioè pensando y come variabile indipendente. Le funzioni diventano $x = e^y$ ed $x = \frac{\sqrt{-y}}{e}$ e l'integrale richiesto è

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{\sqrt{-y}}{e} - e^y \right) dy = \left[\frac{2}{3e} y \sqrt{-y} - e^y \right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{e^2} + \frac{4\sqrt{2}-5}{3e}.$$

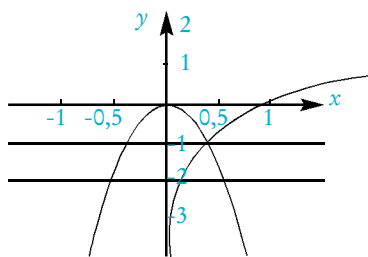


Figura 3

3. Scegliamo $a = 1$ e studiamo la funzione $h(x) = \log x - x^2$. Come già detto, il dominio è l'insieme dei numeri reali positivi, il grafico non incontra mai l'asse delle ascisse e la funzione è sempre negativa, perché il suo massimo è negativo. Già sono stati calcolati anche i limiti $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow +} h(x) = -$ da cui segue che l'asse delle ordinate è asintoto verticale per la funzione e che non ci sono asintoti orizzontali. Osservando che $\lim_{x \rightarrow +} \frac{\log x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +} \left(\frac{\log x}{x} - x \right) = -$ si deduce che non ci sono asintoti obliqui.

La derivata prima $h'(x) = \frac{1}{x} - 2x$ è maggiore o uguale a 0 per $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi si ha il punto di massimo in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ con $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1)$.

La derivata seconda $h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$ risulta sempre negativa: dunque non ci sono flessi e la concavità è rivolta verso il basso in tutto il dominio.

Siamo quindi in condizioni di disegnare il grafico (figura 4).

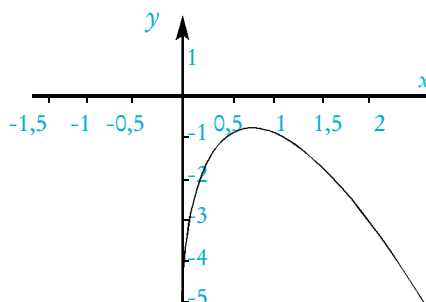


Figura 4

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. Il numero di chicchi richiesto è la somma s_{64} dei primi 64 termini di una progressione geometrica avente come primo termine $a_1 = 1$ e come ragione $q = 2$. Dalle formule sulle progressioni si sa che $s_{64} = a_1 \frac{1 - q^{64}}{1 - q}$, cioè:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

Poiché 1000 chicchi pesano circa 38 g, si ha:

$$\frac{2^{64} - 1}{1000} \cdot 38 \text{ g} \cong 7,00976 \cdot 10^{17} \text{ g} = 7,00976 \cdot 10^{11} \text{ tonnellate.}$$

Un risultato meno preciso si trova anche senza calcolatrice, ricordando che $2^{10} = 1024 \cong 10^3$. Si ha allora $2^{64} = (2^{10})^6 \cdot 2^4 \cong 16 \cdot 10^{18}$ e si ottiene un peso, in tonnellate, maggiore di $6 \cdot 10^{11}$.

2. La dimostrazione richiesta, riportata dai manuali di geometria solida, parte dalla definizione di «poliedro regolare» (poliedro avente come facce poligoni regolari tra loro uguali e i cui diedri hanno tutti uguale ampiezza) e dal teorema secondo cui la somma delle ampiezze degli angoli dei poligoni che convergono in un vertice di un poliedro deve essere strettamente minore di 360° . Si osserva, innanzi tutto, che in ogni vertice di un poliedro devono convergere e re almeno 3 facce; quindi, se le facce sono triangoli equilateri, esse possono essere 3 oppure 4 oppure 5, ma non 6 o più, perché si contraddirebbe il teorema. Se le facce sono quadrati, possono essere solo 3; se sono pentagoni regolari ancora possono essere solo 3 (ogni angolo interno di un pentagono regolare misura 108° e $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ ma $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$). I poligoni regolari con un numero di lati maggiore o uguale a 6, sempre per il teorema citato, non possono essere facce di poliedri regolari, visto che ogni loro angolo interno ha ampiezza mag-

giore o uguale a 120° . Ci sono dunque solo tre poliedri regolari aventi per facce triangoli equilateri (il *tetraedro*, l'*ottaedro*, l'*icosaedro*); un solo poliedro regolare ha poi per facce dei quadrati (il *cubo*) e solo uno ha come facce pentagoni regolari (il *dodecaedro*).

Un'altra dimostrazione, riportata meno di frequente nei manuali scolastici, parte dalla *formula di Eulero*: $f - s + v = 2$. Detto n il numero dei lati di ogni faccia, si ha $nf = 2s$; e, detto x il numero degli spigoli che concorrono in ogni vertice, si ha

$2s = xv$. Si ottiene quindi $s\left(\frac{2}{n} - 1 + \frac{2}{x}\right) = 2$. Esaminando i vari casi possibili per n (con $n \geq 3$) e tenendo presente che $x \geq 3$ e che s deve essere un intero positivo, si arriva alle stesse conclusioni.

Da notare che, con entrambi i procedimenti citati, si dimostra solo che i poliedri regolari sono *al massimo* cinque: resta da dimostrare che i cinque casi non esclusi corrispondono effettivamente ad altrettanti poliedri. Questa parte della dimostrazione – a rigore richiesta nel quesito, anche se probabilmente non voluta dagli estensori – è facile soltanto per tetraedro, cubo e ottaedro (ad esempio, in quest'ultimo caso basta considerare, in un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio, i 6 punti che appartengono ad un asse ed hanno distanza unitaria dall'origine).

3.

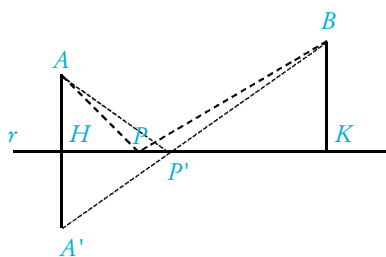


Figura 5

Il metodo più veloce consiste nell'osservare che, detto A' il simmetrico di A rispetto ad r , si ha $AP + PB = A'P + PB$, e quest'ultima somma è minima se A', P e B sono allineati (figura 5; si veda anche l'articolo *Alcune applicazioni del problema di Erone* di D. Foà, pubblicato su Archimede, n. 3 del 2004, pag. 127). Vale anche la pena di notare che, se P' è il punto richiesto, $AH/HP' = BK/KP'$;

questa proporzione corrisponde all'uguaglianza degli angoli acuti formati da AP' e BP' con la retta r (legge della riflessione).

Allo stesso risultato si arriva con i metodi dell'analisi. Si osserva, in primo luogo, che il punto P richiesto deve appartenere al segmento HK : per P esterno, infatti,

la somma delle distanze aumenta. Se $\overline{AH} = a$, $\overline{BK} = b$ e $\overline{HK} = c$ sono i dati del problema, poniamo $\overline{HP} = x$ con $0 < x < c$; la funzione da studiare è

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

Derivando $f(x)$ e studiando il segno della derivata, si trova il minimo per $x = \frac{ac}{a+b}$, che rappresenta la distanza da H del punto P' richiesto.

4. La funzione $f(x) = \sin x - x + 1$, continua e derivabile in tutto \mathbb{R} , è «non crescente»: infatti la sua derivata $f'(x) = \cos x - 1$ è non positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha inol-

tre $f(0) = 1 > 0$ ed $f(2) = \text{sen } 2 - 1 < 0$: si può dunque affermare che $f(x)$ si annulla almeno una volta e, per la monotonia della funzione, si può dire che si annulla una sola volta. La radice α è sicuramente compresa, per quanto detto, tra 0 e 2, ma $f(1,5) = \text{sen } 1,5 - 0,5 > 0$, quindi $1,5 < \alpha < 2$.

Un metodo che fornisce la precisione desiderata è il *metodo di bisezione*: applicando questo metodo, con una calcolatrice tascabile, si trova rapidamente che $\alpha \cong 31/16 = 1,9375$. Un metodo più efficiente (ma più delicato da giustificare) consiste nel considerare l'equazione equivalente $x = \text{sen } x + 1$ e, partendo ad esempio da $x_0 = 1$, nel calcolare i primi termini della successione $x_{n+1} = \text{sen } x_n + 1$; si trova così $\alpha \cong 1,9345632\dots$

5. In ogni polinomio la somma dei coefficienti coincide ovviamente con il valore che assume il polinomio quando si attribuisce il valore 1 alle variabili in esso contenute; e quindi si ha subito la tesi.

Non è richiesto dal testo, ma vale la pena notare che i coefficienti dello sviluppo del binomio in questione sono appunto i coefficienti binomiali, cioè

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ per cui si conclude che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Dal punto di vista della teoria degli insiemi o della combinatoria, il risultato corrisponde al fatto che un insieme con n elementi ha, in tutto, 2^n sottoinsiemi perché $\binom{n}{k}$ è il numero dei sottoinsiemi con k elementi.

6. Si osserva in primo luogo che per $k=0$ non ci sono soluzioni. Per $k \neq 0$ dall'equazione data si ottiene $\cos 2x = \frac{5k-2}{k}$. L'equazione ammette soluzioni per $0 < \frac{5k-2}{k} < 1$, cioè, risolvendo rispetto a k , per $\frac{2}{5} < k < \frac{1}{2}$. Siccome $30^\circ < 2x < 90^\circ$, si ha $0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$; e si conclude che per $\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$ la radice dell'equazione è soluzione del problema.

7. Il significato da attribuire a tale risposta va cercato nella definizione che Bruno de Finetti dà della probabilità. Una citazione più lunga, che in parte chiarisce l'affermazione di de Finetti, è riportata alla fine dell'articolo *Eventi che, con «frequenza», si «scambiano»* di Giuseppe Anichini, pubblicato sul n. 3 di Archimede di quest'anno, pag. 143. Per Bruno de Finetti, la probabilità di un evento E , secondo l'opinione di un determinato individuo, è uguale al prezzo che egli ritiene equo pagare per ricevere un importo unitario al verificarsi dell'evento E . Non solo il numero da associare ad un dato evento dipende dunque dal particolare individuo, ma per uno stesso individuo può cambiare a seconda delle conoscenze che l'individuo ha sull'evento in questione. In questo senso, non esiste una probabilità che abbia un valore oggettivo e generale.

È importante ricordare che l'impostazione della probabilità di de Finetti (*definizione soggettiva*) è una delle possibili impostazioni; spesso, nei corsi scolastici, viene seguita la definizione assiomatica di probabilità, ma in genere si presentano e si confrontano anche le altre definizioni.

8. Sia n il numero di tiri cercato. La probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta in n tiri è $1 - 0,7^n$, dove $0,7^n$ è la probabilità di non colpire mai il bersaglio in n tiri. Quindi si ha la disequazione $1 - 0,7^n \geq 0,99$. Risolvendo rispetto ad n , si ottiene $n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,7} \cong 12,9$: pertanto, servono almeno 13 tiri.
9. È facile rendersi conto che la funzione $f(x) = e^x$ soddisfa tutte le condizioni richieste. Nel testo non è chiaro se si chiede anche di dimostrare che quella trovata è l'unica funzione che soddisfa tali condizioni. In effetti, risultano uguali alla propria derivata tutte e sole le funzioni del tipo $f(x) = c \cdot e^x$ con c costante reale; imponendo $f(0) = 1$ si ottiene $c = 1$. In termini rigorosi, si tratta di risolvere l'equazione differenziale $\frac{df(x)}{f(x)} = dx$.

10. Ci si può avvalere del *metodo dei rettangoli*, dividendo in parti uguali l'intervallo $[0; 1]$ e considerando i rettangoli aventi per basi tali parti e per altezza il minimo (o il massimo) della funzione in ciascun intervallo. Dividendo in 5 parti l'intervallo si ottiene:

$$\text{Area} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \cong \frac{1}{5} \left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f(1) \right] \cong 0,734$$

e $0,734 \cdot 4 = 2,936$

che risulta una stima piuttosto approssimativa di π . Quella ottenuta è una stima per difetto, essendo la funzione decrescente in $[0; 1]$. Se invece consideriamo il valore nel primo estremo di ogni intervallo (che corrisponde al massimo), otteniamo

$$\frac{1}{5} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right] \cong 0,834 \quad \text{e} \quad 0,834 \cdot 4 = 3,336.$$

Si ottiene un risultato migliore o dividendo l'intervallo in un maggior numero di parti, oppure usando il metodo dei trapezi al posto di quello dei rettangoli. In effetti, il metodo dei trapezi, nel nostro caso, fornisce la media aritmetica dei due valori prima trovati, cioè 3,136.

Si noti che l'uguaglianza proposta si dimostra rapidamente ricordando che $\frac{1}{1+x^2}$ è la derivata della funzione $\arctang x$ e che $\arctang 1 = \pi/4$.

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Le prime questioni della prova (problema 1 e quesiti n. 1, n. 3) sono poste sotto forma di problemi concreti, che devono essere prima formalizzati e poi risolti. Non sempre gli alunni sono abituati a farlo: si risolvono in classe sicuramente esercizi vari per introdurre gli argomenti o per approfondire alcune applicazioni, ma allenare i ragazzi a porsi problemi concreti, quotidiani perché li affrontino scegliendo le strategie opportune tra quelle a loro note è qualcosa di diverso e meno usuale. Ritengo che sia un punto su cui riflettere, tenendo conto anche delle discussioni e delle proposte che da varie parti si sentono sullo studio dei modelli matematici, utili nella comprensione e risoluzione di problemi in vari ambiti.

Continuando la lettura del testo, si nota che il secondo problema è un classico problema di analisi, non complicato nel procedimento né nei calcoli (tranne la seconda parte); l'ultima domanda, in verità, in cui si chiede di scegliere un valore arbitrario per il parametro, porta solo in apparenza a studiare funzioni diverse, visto che quasi tutti sono ovviamente portati a scegliere il valore più comodo, cioè $a = 1$.

I quesiti sono vari e tali da poter essere svolti senza eccessive difficoltà dagli studenti. Alcuni richiedono l'applicazione di regole e procedimenti ben noti, come la ricerca di radici di equazioni con il metodo di bisezione (n. 4), più volte richiamato nelle prove d'esame, la discussione di un'equazione parametrica (n. 6), la probabilità (n. 8), l'integrazione numerica (n. 10, quasi identico al n. 7 del tema d'esame P.N.I. nel 2003). Il quesito n. 5 richiede un tipo di dimostrazione che non sempre è immediata per gli studenti, ma proprio per questo permette di valorizzare coloro che riescono a proporla in modo preciso. C'è inoltre un quesito, il n. 2, che parla dei «solidi platonici»; ricordando anche che lo scorso anno era stato proposto «il rapporto aureo», si è portati a rivalutare classici argomenti di geometria, talvolta un po' trascurati, che permettono di costruire collegamenti tra parti diverse della matematica, con la storia ed anche con altre discipline: alzare lo sguardo è sempre utile per trovare nuovi metodi per interesse degli studenti e far loro apprezzare la ricchezza della disciplina. L'opportunità di soffermarsi su alcuni aspetti della storia della matematica è indicata anche dal quesito n. 7, in cui viene ricordato il professor Bruno de Finetti, nell'anniversario della nascita. Il quesito è interessante perché richiede agli studenti una riflessione personale (non banale) sul significato di «probabilità»; è significativo inoltre il riferimento storico perché ricorda ancora una volta che un nome ed una data accanto ad un concetto lo possono rendere più concreto, più chiaro, più coinvolgente.

Pensando alla valutazione e volendo a questo scopo confrontare le varie parti, si nota che il primo problema è sicuramente più semplice del secondo, che appare più laborioso e più ricco di concetti: devono essere tuttavia valutati entrambi allo stesso modo, non essendoci alcuna indicazione diversa in merito; questo vale anche per i quesiti, che, pur con difficoltà diverse, devono avere tutti la stessa valutazione. Mol-

te commissioni inoltre adottano il criterio di ritenere sufficiente una prova quando sia svolto correttamente un solo problema oppure quando siano svolti solo cinque quesiti: sorge dunque la preoccupazione, come già altre volte osservato, che i giudizi si appiattiscano, senza poter riconoscere in modo equo i meriti di ciascun candidato. Non si vedono tuttavia, almeno con questi strumenti, metodi alternativi.

Se infine si confronta la prova assegnata nei licei con sperimentazione P.N.I. con quella assegnata nei licei di ordinamento si vede che esse sono composte in gran parte dagli stessi esercizi: sono uguali i due problemi (tranne una domanda del secondo) e sono gli stessi 5 quesiti (n. 1, 2, 5, 6, 9); mancano inoltre nella prova del P.N.I. diversi argomenti caratteristici come le trasformazioni geometriche, l'algebra lineare, la statistica. Negli ultimi anni questa tendenza ad uniformare le due prove è sempre più evidente e quindi è spontaneo chiedersene la ragione. Non è facile trovare una risposta, ma appare sempre più urgente definire con chiarezza quali debbano essere i saperi essenziali che, per la matematica in particolare, uno studente deve possedere alla fine del liceo per affrontare senza difficoltà gli studi universitari.

Chiara Battagion

Liceo Scientifico «Leonardo da Vinci» – Treviso
chiarabatt@alice.it
