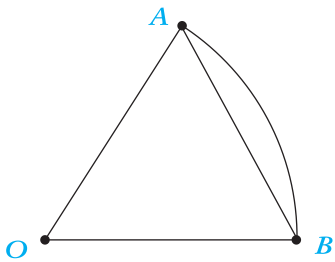
# ESAME DI STATO 2009 SECONDA PROVA SCRITTA PER IL LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.*

## PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare $AOB$ di raggio $r$ e ampiezza $x$ ($r$ e $x$ sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).



1. Si provi che l'area $S$ compresa fra l'arco e la corda $AB$ è espressa, in funzione di $x$, da $S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$ con $x \in [0, 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore $AOB$ pari a $100\,\text{m}^2$. Si trovi il valore di $r$ per il quale è minimo il perimetro di $AOB$ e si esprima il corrispondente valore di $x$ in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore $AOB$ è la base di un solido $W$ le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad $OB$ sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di $W$.

## PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico $G_f$ della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*).

1. Sia $A$ il punto d'intersezione con l'asse $y$ della tangente a $G_f$ in un suo punto $P$, sia $B$ il punto d'intersezione con l'asse $y$ della parallela per $P$ all'asse $x$. Si dimostri che, qualsiasi sia $P$, il segmento $AB$ ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico $G_g$ della funzione $g(x) = \log_a x$ con $a$ reale positivo diverso da 1?
2. Sia $\delta$ l'inclinazione sull'asse $x$ della retta tangente a $G_g$ nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base $a$ è $\delta = 45°$? E per quale valore di $a$ è $\delta = 135°$?

3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da $G_f$ e dalla retta di equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

## QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è sen $x$ e il cui grafico passa per il punto $(0, 2)$.
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di $A$ in $B$, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Per quale o quali valori di $k$ la curva di equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?
4. «*Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni*». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$

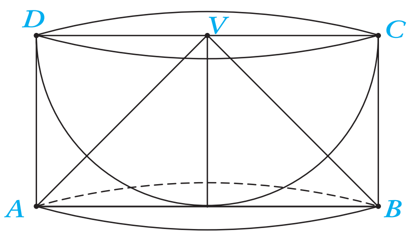
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Si calcoli: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
7. Si dimostri l'identità $\dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n}{k} \dfrac{n-k}{k+1}$ con $n$ e $k$ naturali e $n > k$.
8. Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una *sola* radice compresa fra $-1$ e $0$.

9. Nei «*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*», Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio $r$ e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.



Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la scodella ha volume pari al cono di vertice $V$ in figura.

**10.** Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

*Durata massima della prova: 6 ore.*
*È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.*
*Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.*

## RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

**1.** L'area del triangolo $AOB$ vale $A_{AOB} = \dfrac{r \cdot r \cdot \sin x}{2} = \dfrac{1}{2} r^2 \sin x$, mentre l'area del settore circolare $AOB$ è $A_{settore\ AOB} = \dfrac{r \cdot r \cdot x}{2} = \dfrac{1}{2} r^2 x$.

Se $x = 0$ l'area compresa fra l'arco e la corda $AB$ è zero.
Se $x \in (0, \pi)$ l'area compresa fra l'arco e la corda $AB$ (fig. 1) è la differenza tra l'area del settore circolare $AOB$ e quella del triangolo $AOB$, cioè $S(x) = \dfrac{1}{2} r^2 (x - \sin x)$.
Se $x = \pi$ l'area compresa fra l'arco e la corda $AB$ (fig. 2) è metà dell'area del cerchio di raggio $r$ e quindi $S(x) = \dfrac{1}{2} \pi r^2$.

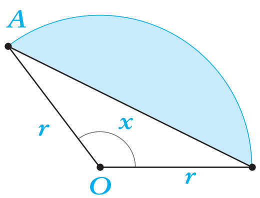



Figura 1

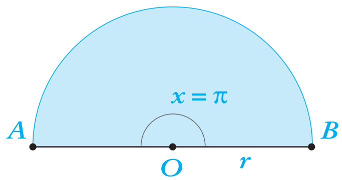



Figura 2

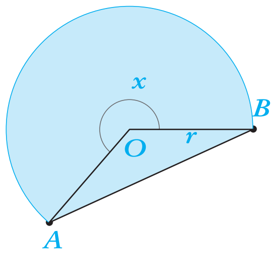



Figura 3

Se $x \in (\pi, 2\pi)$ l'area compresa fra l'arco e la corda $AB$ (fig. 3) è la somma tra l'area del settore circolare $AOB$ e quella del triangolo $AOB$; ma, essendo negativo il valore di $\sin x$, l'area richiesta vale ancora $S(x) = \dfrac{1}{2} r^2 (x - \sin x)$.
Infine, se $x = 2\pi$ l'area compresa fra l'arco e la corda $AB$ è l'area del cerchio di raggio $r$ cioè $S(x) = \pi r^2$.

In definitiva, $\forall x \in [0,\ 2\pi]$ si ha $S(x) = \dfrac{1}{2} r^2 (x - \sin x)$.

**2.** Ponendo $r = 1$ la funzione diventa $S(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x)$ con $x \in [0, 2\pi]$.

Calcolando i valori agli estremi del campo di esistenza si ritrovano i risultati visti al punto precedente per via geometrica: $S(0) = 0$ e $S(2\pi) = \pi$.

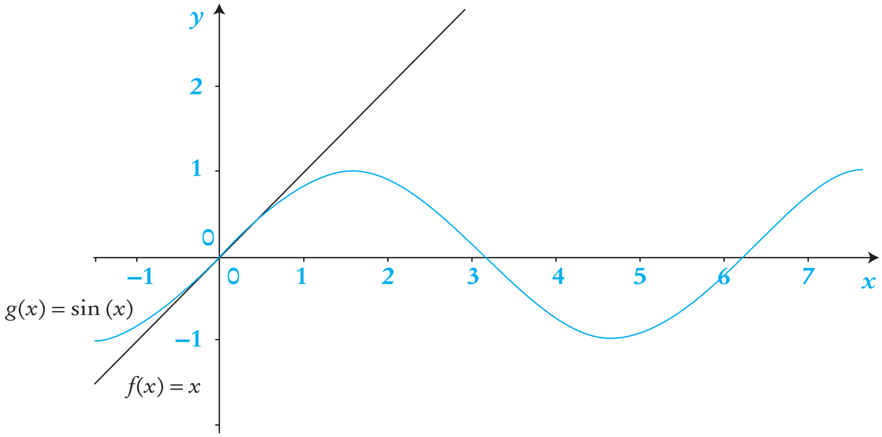



Figura 4

Per trovare gli zeri della funzione bisogna risolvere l'equazione $x - \sin x = 0$, che equivale al sistema $\begin{cases} y = x \\ y = \sin x \end{cases}$. Dal grafico delle due funzioni (fig. 4) si capisce che nell'intervallo $[0, 2\pi]$ esiste un unico zero per $x = 0$. La condizione di tangenza tra la retta $y = x$ e la sinusoide nel punto di ascissa zero si verifica rapidamente con il calcolo della derivata. In realtà, quindi, lo zero è contato due volte, il che vuol dire che il grafico della funzione $S(x)$ è tangente all'asse $x$ nell'origine. Sempre dall'osservazione del grafico delle due funzioni si ricava che la funzione $S(x)$ risulta positiva nell'intervallo $(0, 2\pi]$.

La derivata prima $S'(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ si annulla quando $\cos x = 1$, e quindi per $x = 0$ e per $x = 2\pi$. In tutti gli altri punti la derivata è positiva $(\cos x < 1)$: la funzione $S(x)$, nell'intervallo considerato, è dunque monotona non decrescente e i punti di coordinate $(0, 0)$ e $(2\pi, \pi)$ sono due punti stazionari.

La derivata seconda $S''(x) = \frac{1}{2}\sin x$ si annulla quando $\sin x = 0$ e quindi per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, mentre è positiva nell'intervallo $(0, \pi)$. Pertanto, la funzione $S(x)$, nell'intervallo considerato, rivolge la concavità verso l'alto nell'intervallo $(0, \pi)$ e verso il basso nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$; il punto di coordinate $(\pi, \pi/2)$ è un flesso a tangente obliqua (fig. 5).

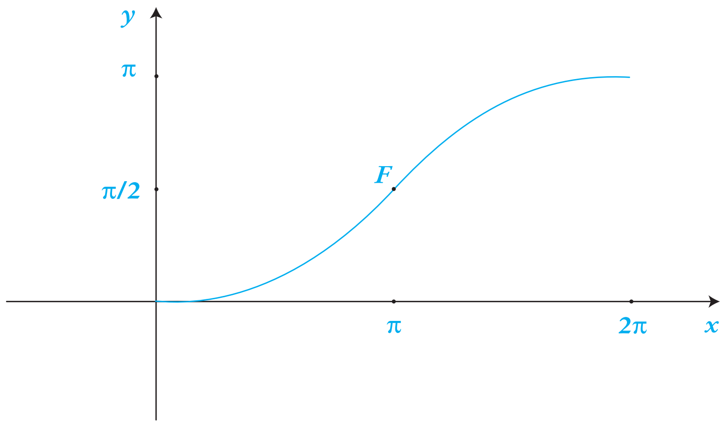



Figura 5

**3.** Nel testo, non è del tutto chiara la richiesta relativa al «perimetro di $AOB$», perché in genere la parola *perimetro* è usata di preferenza con riferimento ai poligoni. D'altra parte, il triangolo $AOB$ non è mai menzionato nel testo, per cui si deve senz'altro intendere la lunghezza del contorno del *settore* $AOB$.

Sia $A_{settore\ AOB} = \frac{1}{2}r^2x = 100\ \text{m}^2$, da cui $x = \frac{200}{r^2}$. Essendo allora $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ e $\overline{AB} = x \cdot r$, il perimetro del settore circolare vale $2r + xr = 2r + \frac{200}{r}$ con $r > \frac{10}{\sqrt{\pi}}$. La limitazione su $r$ deriva dal fatto che il settore circolare è contenuto nel cerchio di raggio $r$ e quindi l'area del cerchio non può essere inferiore a $100\ \text{m}^2$: da $\pi r^2 > 100$ si deduce $r^2 > \frac{100}{\pi}$ e quindi $r > \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

La derivata della funzione precedente è $2 - \frac{200}{r^2}$ e si annulla per $r = -10$ e $r = 10$; ma l'unica soluzione accettabile è quella positiva; nell'intervallo considerato, la derivata risulta negativa nell'intervallo $\left(\frac{10}{\sqrt{\pi}},\ 10\right)$ e positiva in $(10,\ +\infty)$. Quindi per $r = 10$ si ottiene il minimo del perimetro del settore. Sostituendo in $x = \frac{200}{r^2}$ si ottiene $x = 2$ radianti; dalla proporzione $2 : x = \pi : 180$ si conclude $x = \frac{360°}{\pi} \approx 115°$.

**4.** Con $r = 2$ e $x = \pi/3$ consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali nel quale il punto $O$ sia l'origine del sistema di assi e un lato del settore giaccia sul-

l'asse $x$ come in figura 6. Allora: $A$ ha coordinate (2, 0), l'altro lato del settore appartiene alla retta $y=\sqrt{3}x$, $B$ ha coordinate $(1, \sqrt{3})$, l'arco del settore giace sulla semicirconferenza di equazione $y=\sqrt{4-x^2}$.
La richiesta è simile ad altre comparse negli anni scorsi: il volume di $W$ si calcola mediante l'integrale delle aree delle sezioni parallele del solido (che sono quadrati), ottenute con piani perpendicolari all'asse $x$.

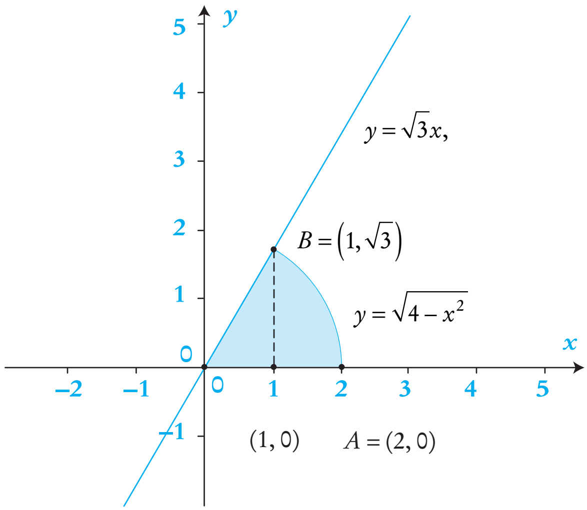



Figura 6

$$V_W=\int_0^1\left(\sqrt{3}x\right)^2dx+\int_1^2\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2dx=\int_0^1 3x^2dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx=\left[x^3\right]_0^1+\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}.$$

Il solido si può pensare come la somma di due parti: una piramide a base quadrata con il vertice nell'origine (che ha volume $\frac{1}{3}\cdot A_{base}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1=1$) e un altro solido, il cui volume si calcola solo ricorrendo al calcolo integrale come visto in precedenza. Il volume del solido $W$ è quindi $V_W=8/3$.

## RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Il grafico del logaritmo naturale è riportato in figura 7.

**1.** Consideriamo un punto $P(x_P, \log x_P)$ appartenente a $G_f$, con $x_P > 0$ (fig. 8).

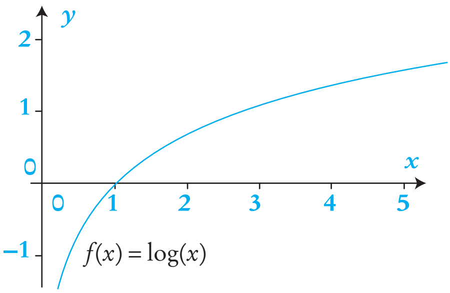



Figura 7

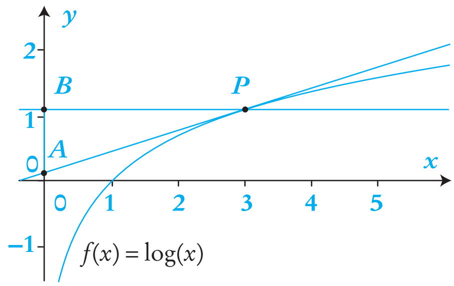



Figura 8

Il punto $B$ ha coordinate $(0, \log x_P)$. Per trovare le coordinate del punto $A$ determiniamo l'equazione della retta tangente a $G_f$ in $P$: il coefficiente angolare della tangente è $f'(x_P) = 1/x_P$ e quindi l'equazione della retta è

$$y - \log x_P = \frac{1}{x_P}(x - x_P) \qquad \text{cioè} \qquad y = \frac{1}{x_P}x + \log x_P - 1$$

Il punto $A$ ha coordinate $(0, \log x_P - 1)$ e di conseguenza la lunghezza del segmento $AB$ è: $\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\log x_P - \log x_P + 1| = 1,$ costante al variare di $P$.

Se la funzione è $g(x) = \log_a x$, con $a$ reale positivo diverso da 1, il procedimento è lo stesso, ma i calcoli sono leggermente diversi in quanto la derivata della funzione è $g'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$. Si trovano i due punti di coordinate $A(0, \log_a x_P - \log_a e)$ e $B(0, \log_a x_P)$; di conseguenza la lunghezza del segmento $AB$ diventa: $\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\log_a x_P - \log_a x_P + \log_a e| = |\log_a e|$, che è ancora costante, una volta fissato il valore $a$ della base, al variare di $P$ su $G_g$.

**2.** Dire che $\delta$ è l'inclinazione sull'asse $x$ della tangente a $G_g$ nel suo punto di ascissa 1 significa che $\delta$ è l'angolo formato con l'asse $x$ dalla tangente considerata, cioè che il coefficiente angolare della retta tangente è tg $\delta$. Tale coefficiente angolare vale $g'(1) = \log_a e$. Di conseguenza:

se $\delta = 45°$ allora $\mathrm{tg}\,\delta = 1$ e quindi $\log_a e = 1$, cioè $a = e$;
se $\delta = 135°$ allora $\mathrm{tg}\,\delta = -1$ e quindi $\log_a e = -1$, cioè $a = 1/e$

(in questo secondo caso la funzione $g(x)$ è decrescente).

**3.** È immediato che la retta $y = 1$ incontra il grafico $G_f$ nel punto $(e, 1)$. L'area richiesta, quella della regione colorata in figura 9, può essere calcolata come differenza tra l'area del rettangolo di base $e$ ed altezza 1 e l'area sottesa a $G_f$ nell'intervallo $[1, e]$.

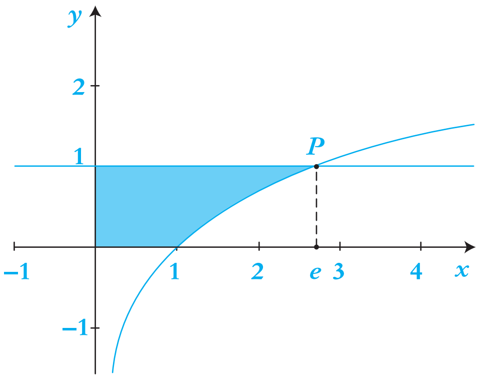



Figura 9

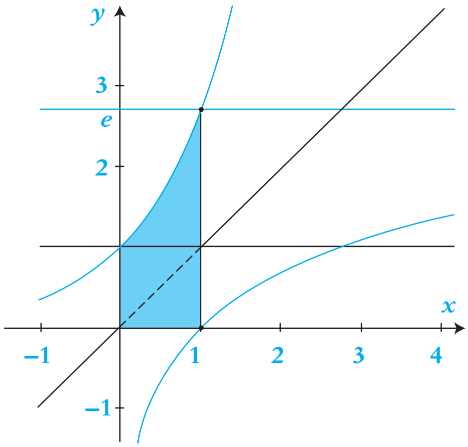



Figura 10

$$A_{\mathbf{D}} = e - \int_1^e \ln x \, dx = e - \left[x \ln x - x\right]_1^e = e - 1.$$

Un metodo più rapido consiste nel calcolare l'area della regione **D'** simmetrica di **D** rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (figura 10):

$$A_{D'} = \int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1.$$

**4.** Per calcolare il volume del solido richiesto, conviene effettuare la traslazione di vettore $\vec{v}(1, 0)$ in modo che l'asse di rotazione coincida con l'asse $y$; una traslazione non varia il volume in quanto le misure come aree e volumi sono invarianti per isometrie. Viene però modificata l'equazione della curva che diventa $y = \log(x - 1)$.
Per effettuare una rotazione intorno all'asse $y$ conviene trovare la funzione inversa di $y = \log(x - 1)$:

$$\text{da} \qquad e^y = x - 1 \qquad \text{segue} \qquad x = e^y + 1\,.$$

La regione $\bar{\mathbf{D}}$ sottesa dal grafico di quest'ultima funzione nell'intervallo $[0, 1]$ comprende anche il quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, che non fa parte di **D**. Il volume richiesto si determina quindi sottraendo dal volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di $\bar{\mathbf{D}}$ attorno all'asse $y$, il volume del cilindro di raggio di base 1 ed altezza 1:

$$V=\pi\int_0^1(1+e^y)^2\mathrm{d}y-\pi=\pi\int_0^1(1+2e^y+e^{2y})\mathrm{d}y-\pi=\pi\left[y+2e^y+\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1-\pi=$$

$$=\pi\left(\frac{e^2}{2}+2e-\frac{5}{2}\right).$$

## RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. La famiglia delle primitive di $y=\sin x$ è $\int\sin x\,dx=-\cos x+k.$ Imponendo il passaggio per il punto di coordinate $(0, 2)$ si trova $-1+k=2$ e quindi $k=3$. La funzione è dunque $y=-\cos x+3$.
2. Si veda la soluzione del quesito con lo stesso numero nel tema PNI.
3. La famiglia è composta da curve tutte derivabili e quindi continue in **R**; i punti a tangente «orizzontale» sono i punti nei quali la tangente ha coefficiente angolare uguale a zero. Si tratta quindi di trovare i punti le cui ascisse annullano la derivata prima $f'(x)=3x^2+2kx+3$. La derivata si annulla una sola volta se e solo se l'equazione $3x^2+2kx+3=0$ ha discriminante nullo, cioè se e solo se $\Delta/4=k^2-9=0$, ovvero per $k=-3$ e per $k=3$.
4. Si veda la soluzione del quesito con lo stesso numero nel tema PNI.
5. Il contesto sembra essere quello dei numeri reali con le usuali operazioni. La prima espressione è $\frac{0}{1}=0$ per definizione di divisione, in quanto 0 è l'unico numero che moltiplicato per 1 dà 0.

   All'espressione $\frac{0}{0}$ non si attribuisce un significato numerico: sempre in base alla definizione di divisione, come risultato si dovrebbe accettare un qualunque numero reale ($0\cdot x=0$ per ogni $x$ in **R**); e questo non è lecito dovendo essere unico il risultato di un'operazione.

   All'espressione $\frac{1}{0}$ non è possibile dare significato numerico perché non esiste un numero che moltiplicato per 0 dia come risultato 1 (il prodotto di un qualsiasi numero per 0 è sempre 0).

   Per l'ultima espressione infine, in linea di principio, non c'è un ostacolo che impedisca di attribuire un valore numerico alla scrittura $0^0$, come è fatto per $a^0=1$ (per ogni $a\neq 0$) o per $0^n=0$ (per ogni $n>0$). Ma sono proprio queste posizioni

che conducono alle due alternative inconciliabili $0^0 = 0$ e $0^0 = 1$; di conseguenza è preferibile non attribuire alcun significato numerico all'espressione $0^0$.
Questa conclusione è coerente con quanto si studia in un altro contesto, quello dell'analisi, dove si dice che $0^0$ è una *forma indeterminata*, il che significa che se si considerano due funzioni $f$ e $g$ tali che $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, queste informazioni non sono sufficienti per determinare il $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$.
Per una trattazione esauriente della questione si veda: V. Villani, «*Cominciamo da Zero*», Pitagora Editrice Bologna, pagg. 118-122.

**6.** Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Conviene raccogliere $x^2$ nel radicando; tenendo presente che $\sqrt{x^2}=|x|$ si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

Visto che si considera il limite per $x\to-\infty$ si può supporre $x<0$; si ha allora $|x|=-x$ e quindi

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1.$$

È interessante notare che la regola di De L'Hospital è inefficace in questo caso, in quanto si ottiene la funzione reciproca di quella data e, quindi, ancora la stessa forma indeterminata.

**7.** Se $n$ e $k$ sono naturali e $n>k$, si ha

$$\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{n-k}{k+1}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=\binom{n}{k+1}.$$

**8.** La funzione $f(x)=x^{2009}+2009x+1$, essendo un polinomio, è derivabile e quindi continua in $\mathbf{R}$ e, in particolare, nell'intervallo $[-1,0]$. Agli estremi dell'intervallo assume valori discordi: infatti: $f(-1)=-1-2009+1=-2009$ e $f(0)=+1$.
Nell'intervallo $[-1,0]$ la funzione ammette dunque almeno uno zero per il teorema di esistenza degli zeri che afferma: «*Data una funzione continua in un intervallo chiuso* $[a,b]$, *se* $f(a)\cdot f(b)<0$ *esiste almeno un valore* $c\in(a,b)$ *tale che* $f(c)=0$».
Inoltre, la derivata $f'(x)=2009x^{2008}+2009$ risulta positiva per ogni $x\in\mathbf{R}$. La funzione è dunque monotona crescente in tutto $\mathbf{R}$ e quindi nell'intervallo $[-1,0]$: concludiamo che lo zero è unico.

**9.** Il principio di Cavalieri afferma che: «*Se due solidi si possono collocare in modo tale che tutti i piani paralleli a un piano dato intersechino i due solidi secondo figure di ugual area, allora hanno lo stesso volume*».
Si intersechino scodella e cono con un qualsiasi piano parallelo alla base del cono. Sia $\overline{VH} = x$ la distanza del vertice del cono dal piano; la sezione sulla scodella è una corona circolare, cioè la differenza di due cerchi, di area rispettivamente

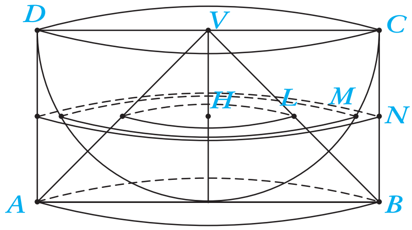



Figura 11

$$\pi r^2 \quad \text{e} \quad \pi \overline{HM}^2 = \pi\left(\overline{VM}^2 - \overline{VH}^2\right) = \pi\left(r^2 - x^2\right).$$

L'area della corona circolare è quindi $\pi r^2 - \pi\left(r^2 - x^2\right) = \pi x^2$. Lo stesso piano individua sul cono un cerchio di raggio $\overline{HL} = \overline{VH} = x$ (l'altezza del cono è uguale al raggio) e quindi di area $\pi x^2$.
Poiché tutti i piani paralleli alla base individuano sui due solidi sezioni equivalenti, per il principio di Cavalieri i due solidi sono equivalenti.

**10.** Nel testo si chiede il «periodo» di una data funzione; sarebbe stato preferibile parlare di «periodo minimo», ma non crediamo che questa imprecisione possa aver creato incertezze nei candidati.
Il grafico della funzione $f(x) = \cos 5x$ può essere ricavato da quello della funzione $g(x) = \cos x$ mediante l'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{5} \\ y' = y \end{cases}$.
La trasformazione, che «agisce» solo sulle ascisse, provoca un cambiamento nel periodo della funzione (il grafico diventa più «fitto»). Nel nostro caso, essendo $2\pi$ il periodo di $g(x) = \cos x$, il periodo di $f(x) = \cos 5x$ è $\dfrac{2\pi}{5}$.

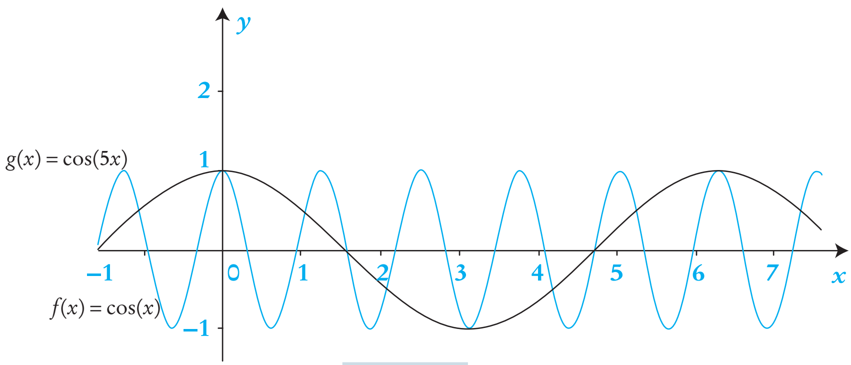



Figura 12

In alternativa, senza usare le trasformazioni, si perviene allo stesso risultato con la definizione di funzione periodica. La funzione $g(x) = \cos x$ ha periodo $2\pi$, pertanto: $\cos(5x + 2k\pi) = \cos 5x$. Quindi si ha $\cos 5\left(x + k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) = \cos(5x + 2k\pi) =$

$= \cos 5x$, da cui si deduce che il periodo di $f(x) = \cos 5x$ è $2\pi/5$.

## CONSIDERAZIONI E COMMENTI

La prova di matematica per i Licei Scientifici di ordinamento non è particolarmente complessa. Alcune indicazioni formulate da associazioni di insegnanti, comparse sotto forma di dibattito in liste di discussione come *Cabrinews* o su articoli di riviste specializzate, sembrano essere state recepite dagli estensori della prova. Per esempio, all'interno dei due problemi le richieste sono sostanzialmente indipendenti e di difficoltà crescente: queste caratteristiche da un lato rassicurano gli alunni e consentono loro di svolgere parti del problema senza bloccarsi all'inizio, e dall'altro permettono alle commissioni di individuare meglio conoscenze e competenze e quindi di valutarle in modo più preciso. Rimangono invece ancora disattese le richieste che tutte le questioni riguardino argomenti dei programmi vigenti (che per il Liceo Scientifico di ordinamento risalgono al 1945) e che i quesiti siano ben formulati con richieste non ambigue e non generiche. In particolare, non sono esplicitamente presenti nei programmi la richiesta del punto 4 del problema 1, quella del punto 4 del problema 2, né quella del quesito 2.

Il primo problema è ben strutturato con quesiti di difficoltà crescenti e indipendenti, contiene risultati di controllo (si veda il punto 1) e i calcoli non sono particolarmente laboriosi. Tuttavia, alcuni «passaggi» possono avere creato difficoltà agli studenti: per esempio nel primo punto era necessario giustificare l'intervallo di variabilità dell'incognita esplicitando almeno due casi, angolo compreso fra $0$ e $\pi$ e angolo compreso fra $\pi$ e $2\pi$ (la figura inserita nel testo, rappresentando solo uno dei casi possibili, può trarre in inganno). Anche il secondo punto comporta, nello studio di funzione, una risoluzione grafica di equazioni e di disequazioni che non è prassi didattica consolidata nell'indirizzo ordinario, ma è pur vero che si poteva intuire la situazione e pervenire comunque al grafico della funzione analizzando derivata prima e seconda. Il terzo non è banale se si considera il fatto che il testo suggerisce di individuare come incognita il raggio e non l'angolo considerato in precedenza; il quarto infine è diventato un «classico», in quanto, nonostante il metodo non sia esplicitamente menzionato nei programmi, molti insegnanti lo hanno inserito nel loro percorso didattico visto che sono comparsi esercizi simili nei compiti degli ultimi tre anni.

Il secondo problema è più impegnativo nei calcoli rispetto al primo anche se, come il primo, è composto da quesiti sostanzialmente indipendenti; sicuramente non è banale condurre la dimostrazione richiesta nella prima domanda con le coordinate di un punto generico.

I quesiti presentano minori difficoltà e un alunno mediamente preparato ha certamente potuto trovarne più della metà alla sua portata.

Il primo e il terzo quesito, ben formulati e abbastanza facili, riguardano conoscenze fondamentali del percorso del quint'anno; anche il sesto si riferisce a un argomento normalmente svolto, la difficoltà maggiore sta nell'aver ben acquisito il concetto di modulo e aver compreso che $\sqrt{x^2} = |x|$.

Il quesito 7 presenta un esercizio di calcolo combinatorio sostanzialmente nozionistico, nel quale, come è capitato in altri anni, si richiede semplicemente la conoscenza della formula e non il significato dei coefficienti binomiali.

Leggermente più difficili i quesiti 8 e 9 che comunque sono ben formulati e riguardano argomenti che vengono normalmente affrontati. Facilissimo il quesito 10, anche se, per come è formulato, è poco significativo: si è indotti a pensare che sia necessario solo applicare la formula che esprime il periodo della funzione proposta.

Un discorso a parte merita il quesito 5, che tanto dibattito ha sollevato anche nella lista *Cabrinews*. Ci sono tre questioni che lasciano perplessi: la richiesta appare ambigua perché non è molto chiaro quale risposta ci si attenda; non è chiaro nemmeno il contesto di riferimento: il programma appena svolto in quinta può indurre a pensare le espressioni come risultati di limiti e non ad operazioni tra numeri reali; infine, la questione posta in merito all'espressione $0^0$ è stata fonte di discussione anche tra insegnanti (pare ci siano diverse «scuole di pensiero» sulla risposta da dare); questo rende sicuramente il quesito interessante, ma difficile da valutare.

Nel complesso, rispetto al passato, è rappresentato in misura maggiore il programma del quinto anno e, come detto in precedenza, la prova sembra più in linea con le sollecitazioni che arrivano, ormai da alcuni anni e da più parti, al Ministero.

Ciò nonostante, l'impressione è che anche quest'anno la prova abbia messo in difficoltà una parte considerevole di studenti con una preparazione sulla carta discreta, come era già stato sottolineato dall'indagine UMI-INVALSI relativa all'esame del 2007. Per quale motivo i nostri ragazzi affrontano la prova con un carico d'ansia a volte eccessivo, al punto da comprometterne la lucidità e il rendimento? I fattori sono molteplici (si veda in proposito l'intervento di Luigi Tomasi al Convegno UMI-CIIM a Roma nell'ottobre 2008), ma forse due sono i principali:

– programmi obsoleti, con indicazioni generiche che consentono di inserire nelle prove d'esame i più disparati argomenti e che hanno costretto in questi anni gli insegnanti ad adeguare personalmente i percorsi, seguendo i libri di testo e le mode del momento comparse nei temi degli anni precedenti;
– un quadro orario per la matematica nel liceo di ordinamento molto esiguo, che rischia di indurre un insegnamento mirato più all'addestramento che non all'acquisizione di conoscenze e competenze.

Queste difficoltà sono da anni sottolineate da un numero considerevole di insegnanti, a partire dalla lettera inviata al Ministero da un gruppo di più di 200 insegnanti dopo la prova del 2007, per arrivare all'ultimo documento dell'associazione *Animat*, sottoscritto da oltre 300 insegnanti prima della prova di quest'anno.

La prova ha ancora evidenziato come sia necessario ribadire queste richieste, prime fra tutte che il Ministero pubblichi un *Syllabus* che «*indichi con chiarezza quali sono le conoscenze e le competenze matematiche richieste per le diverse prove d'esame*» e, in secondo luogo, dia «*un'esplicita indicazione dei punteggi massimi da attribuire alla singole parti della prova rendendo così più oggettiva e confrontabile l'autonoma valutazione da parte delle Commissioni d'esame*».

Solo in questo modo, in attesa che venga definita una riforma dei curricoli, docenti e studenti saranno messi in condizione di arrivare con serenità alla prova d'esame: i primi perché consapevoli di aver progettato un percorso didattico efficace e i secondi perché possono contare su una preparazione adeguata che consenta di vivere questa prova *non* come un «*terno al lotto*».

**Nicoletta Nolli**
Liceo Scientifico G. Aselli, Cremona
nico559@libero.it