

## ESAME DI STATO 2009 SECONDA PROVA SCRITTA PER I LICEI SCIENTIFICI A INDIRIZZO SPERIMENTALE (PNI)

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.*

### PROBLEMA 1

Sia  $f$  la funzione definita da

$$f(x) = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \cdot e^{-x},$$

dove  $n$  è un numero positivo e  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Si verifichi che la derivata di  $f(x)$  è:  $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$ .
2. Si dica se la funzione  $f$  ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando  $n$  è dispari,  $f(x) \leq 1$  per ogni  $x$  reale.
3. Si studi la funzione  $g$  ottenuta da  $f$  quando  $n = 2$  e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli  $\int_0^2 g(x) dx$  e se ne dia l'interpretazione geometrica.

### PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ , si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^3 + kx$ , con  $k$  parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di  $f$  al variare di  $k$  ( $k$  positivo, negativo o nullo).
2. Sia  $g(x) = x^3$  e  $\gamma$  il suo grafico. Si dimostri che  $\gamma$  e la retta d'equazione  $y = 1 - x$  hanno un solo punto  $P$  in comune. Si determini l'ascissa di  $P$  approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia  $D$  la regione finita di piano delimitata da  $\gamma$  e dal grafico della funzione inversa di  $g$ . Si calcoli l'area di  $D$ .
4. La regione  $D$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di  $W$ .

## QUESTIONARIO

1. Siano:  $0 < a < b$  e  $x \in [-b, b]$ . Si provi che:  $\int_{-b}^b |x-a| dx = a^2 + b^2$ .
2. Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di  $A$  in  $B$ , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).
4. «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

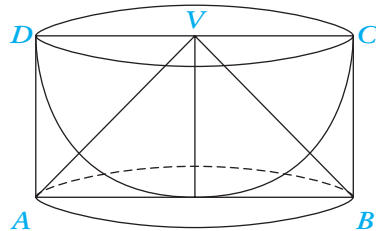
$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

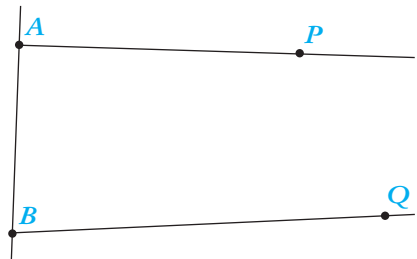
6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione  $\sin x = 0$ , con punto iniziale  $x_0 = 3$ . Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$  con  $n$  e  $k$  naturali e  $n > k$ .
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

9. Nei «Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze», Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio  $r$  e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.

Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice  $V$  in figura.



10. «Se due punti  $P$  e  $Q$  del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta  $AB$  e gli angoli  $\hat{PAB}$  e  $\hat{QBA}$  hanno somma minore di  $180^\circ$ , allora le semirette  $AP$  e  $BQ$ , prolungate adeguatamente al di là dei punti  $P$  e  $Q$ , si devono intersecare». Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1. La funzione  $f$ , essendo il prodotto tra un polinomio e un esponenziale, è ovunque derivabile. Applicando la regola della derivata di un prodotto abbiamo che:

$$f'(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \cdot e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \cdot e^{-x} = -\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x}.$$

2. Distinguiamo i casi  $n$  pari e  $n$  dispari:

a) se  $n$  è pari,  $x^n$  è positivo e quindi  $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} \leq 0$  per ogni  $x$  reale (ed  $f'(x) = 0$  solo per  $x = 0$ ); la funzione  $f$  è quindi decrescente in  $\mathbf{R}$  e non ha massimi o minimi (ha un punto stazionario in  $x = 0$ , ma è un flesso a tangente orizzontale);

b) se  $n$  è dispari,  $f'(x) < 0$  per  $x > 0$ , mentre  $f'(x) > 0$  per  $x < 0$  ed  $f'(x) = 0$  se  $x = 0$ ; pertanto  $f$  ha un massimo assoluto in  $x = 0$  e non ammette minimi.

Siccome  $f(0) = 1$ , il punto di massimo assoluto è  $(0, 1)$ : concludiamo che, nel caso  $n$  dispari,  $f(x) \leq 1$  per ogni  $x$  reale.

Osserviamo che il fatto che per  $n$  dispari si abbia  $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \cdot e^{-x} \leq 1$ ,

equivale a dire che  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$ ; nella figura 1 sono illustrati i casi  $n = 1$  ed  $n = 3$ .

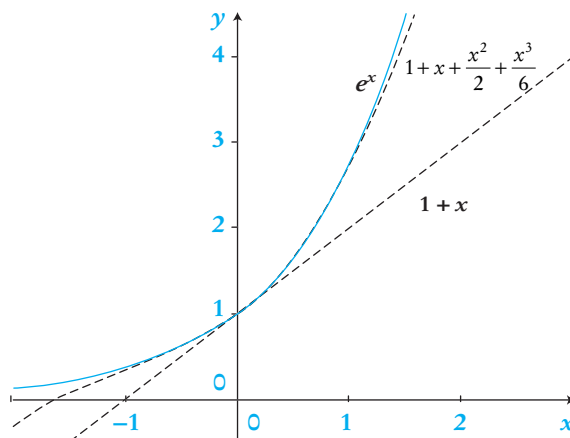


Figura 1

Accenniamo a una proprietà più generale che si ottiene con gli sviluppi di Mac Laurin, anche se l'argomento esula dai programmi del Liceo scientifico PNI. Lo sviluppo di Mac Laurin dell'esponenziale è:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1} \quad \text{dove, utilizzando il resto di Lagrange, } R_{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Se  $n$  è dispari,  $n+1$  è pari e quindi  $R_{n+1}$  è positivo perché  $x^{n+1} \geq 0$ : pertanto  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  per ogni  $x$ .

Se invece  $n$  è pari, il resto è positivo per  $x$  positivo, mentre è negativo per  $x$  negativo, quindi:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{per } x \geq 0 \quad \text{mentre } e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{per } x \leq 0.$$

**3.** La funzione  $g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{-x}$  ha dominio  $\mathbf{R}$  ed è ovunque positiva.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{-x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2}}{e^x} = 0^+$$

perché l'ordine di infinito dell'esponenziale è superiore a quello di un qualsiasi polinomio.

Sappiamo già che  $g$  è decrescente, che ha un flesso a tangente orizzontale in  $(0, 1)$  e che la derivata prima è  $g'(x) = -\frac{x^2}{2} e^{-x}$ .

La derivata seconda è  $g''(x) = \frac{x(x-2)}{2} e^{-x}$ : pertanto,  $g$  è convessa in  $(-\infty, 0)$  e in  $(2, +\infty)$ , è concava in  $(0, 2)$ ; oltre al flesso già trovato, ce n'è un altro nel punto di coordinate  $(2, 5e^{-2})$ . Il grafico è illustrato in figura 2.

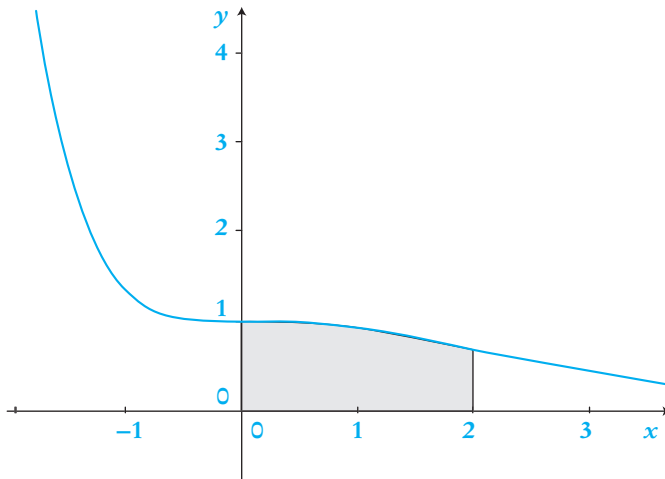


Figura 2

4. L'integrale  $\int_0^2 g(x)dx$  è l'area del trapezoide tra i due punti di flesso (figura 2).

Integrando per parti, si trova che  $\int xe^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} + C$ , da cui, con una successiva integrazione per parti si ottiene:

$$\int \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx = -\frac{x^2 + 4x + 6}{2} \cdot e^{-x} + C, \text{ e quindi}$$

$$\int_0^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^{-x} dx = \left[-\frac{x^2 + 4x + 6}{2} \cdot e^{-x}\right]_0^2 = -9e^{-2} + 3.$$

## RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1. La funzione  $f(x) = x^3 + kx$  è definita in  $\mathbf{R}$ ; siccome  $f(-x) = -f(x)$ , la funzione è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  qualunque sia  $k$ .

$f(x) = 0$  se  $x(x^2 + k) = 0$ ; quindi  $f$  ha in ogni caso uno zero in  $x = 0$ , che è triplo se  $k = 0$ , altrimenti è semplice; la funzione non ha ulteriori zeri se  $k \geq 0$ , mentre se  $k < 0$  ha altri due zeri semplici in  $x = \pm\sqrt{-k}$ .

La derivata è  $f'(x) = 3x^2 + k$  che è sempre positiva se  $k > 0$ , mentre si annulla in

$$x = \pm\sqrt{\frac{-k}{3}} \text{ se } k \leq 0.$$

Quindi:

- a)** se  $k > 0$ , e anche per  $k = 0$ , la funzione  $f$  è crescente in tutto  $\mathbf{R}$ ;
- b)** se  $k < 0$ , allora  $f$  cresce negli intervalli  $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$  e  $\left(\sqrt{\frac{-k}{3}}, +\infty\right)$  mentre decresce in  $\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}}, \sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$ .

La derivata seconda è  $f''(x) = 6x$ : quindi, per ogni  $k$ , la funzione  $f$  è convessa per  $x$  positivo ed è concava per  $x$  negativo; in  $x = 0$  c'è un flesso, con tangente di equazione  $y = kx$  perché  $f'(0) = k$ .

I grafici nei casi  $k = 1$ ,  $k = 0$ ,  $k = -1$  sono disegnati nelle figure 3, 4, 5.

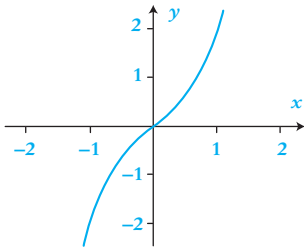


Figura 3

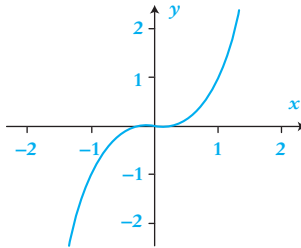


Figura 4

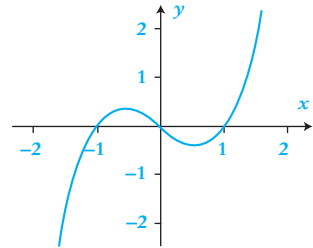


Figura 5

- 2.** Per mostrare che  $x^3 = 1 - x$  ha una sola soluzione, possiamo studiare gli zeri della funzione  $h(x) = x^3 + x - 1$ .

Siccome  $h$  è continua e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \pm\infty$ , come conseguenza del teorema degli zeri, essa ha almeno uno zero; essendo  $h$  crescente (perché somma di funzioni crescenti) lo zero è unico. La tabella seguente riporta i calcoli effettuati per trovare un valore approssimato con il metodo di bisezione, a partire dai valori  $a = 0$  e  $b = 1$ .

$a$	$b$	$h(a)$	$h(b)$	$c = \frac{a+b}{2}$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$	$h(c)$
0	1	-1	1	0,5	0,5	-0,375
0,5	1	-0,375	1	0,75	0,25	0,171875
0,5	0,75	-0,375	0,171875	0,625	0,125	-0,13086
0,625	0,75	-0,13086	0,171875	0,6875	0,0625	0,012451

Otteniamo un valore approssimato  $c = 0,6875$  con un errore  $\varepsilon$  minore di 0,1.

3. La funzione inversa di  $g$  è  $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ; i due grafici si intersecano, oltre che nell'origine, nei punti  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ .

Siccome i grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (figura 6), possiamo calcolare l'area richiesta raddoppiando quella compresa tra  $\gamma$  e la bisettrice. Nel testo non è del tutto chiaro se ci si debba limitare al primo quadrante ovvero se vada considerata anche la regione compresa nel terzo quadrante. Se ci limitiamo al primo quadrante l'area di  $D$  è

$$2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

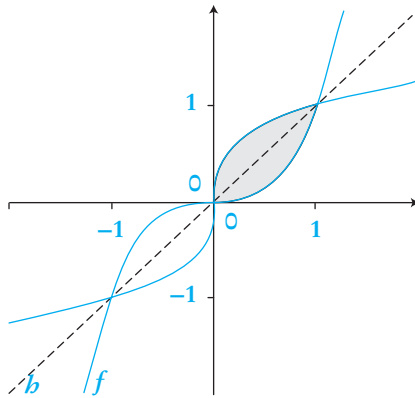


Figura 6

4. Le sezioni del solido  $\mathbb{W}$  hanno tutte altezza 12, quindi l'area è massima se è massima la base. Consideriamo la metà della base, cioè la distanza tra un punto  $(a, a^3)$  di  $\gamma$  e la bisettrice del primo e terzo quadrante, e determiniamo per quale  $a \in [0, 1]$  essa è massima. Essendo  $x - y = 0$  l'equazione della bisettrice, la distanza è  $d(a) = \frac{a - a^3}{\sqrt{2}}$ . I minimi di  $d$  in  $[0, 1]$  sono  $d(0) = d(1) = 0$ ; il massimo esiste per il teorema di Weierstrass e lo si trova annullando la derivata prima  $1 - 3a^2 = 0$ . Tenendo conto delle limitazioni, si ottiene  $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ . Concludendo, la sezione di area massima è quella passante per il punto  $\left( \sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$ .

Alternativamente, possiamo determinare questo punto cercando le tangenti al grafico di  $g(x) = x^3$  parallele alla bisettrice. Imponendo  $g'(x) = 1$  e risolvendo l'equazione  $3x^2 = 1$ , otteniamo il risultato appena trovato.

Il volume del solido  $\mathbb{W}$  si trova moltiplicando l'area di base per l'altezza; l'area di base trovata nel punto precedente è  $1/2$ , l'altezza misura 12: quindi il volume richiesto è 6 (ovvero 12 se si considera nella base anche il terzo quadrante).

## RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. Il grafico della funzione  $y = |x - a|$  si ottiene traslando di  $a$  verso destra il grafico di  $y = |x|$ . Per calcolare l'integrale richiesto possiamo semplicemente trovare le aree dei due triangoli colorati in figura 7.

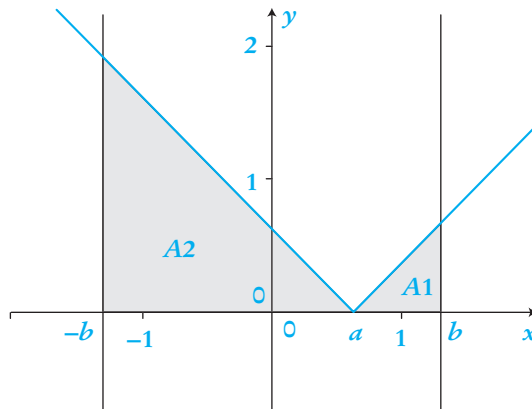


Figura 7

$$\int_{-b}^b |x - a| dx = A1 + A2 = \frac{(b - a)(b - a)}{2} + \frac{(a + b)(a + b)}{2} = \frac{2b^2 + 2a^2}{2} = a^2 + b^2.$$

2. Intendiamo che  $A$  sia il dominio della funzione, cioè l'insieme degli elementi a ciascuno dei quali si associa uno e un solo elemento di  $B$ . Allora esistono funzioni suriettive da  $A$  in  $B$ , cioè funzioni in cui l'immagine è  $B$ : un esempio è la funzione tale che  $1 \rightarrow a$ ,  $2 \rightarrow b$ ,  $3 \rightarrow c$ ,  $4 \rightarrow a$ . Questa funzione non è però iniettiva perché sia 1 che 4 hanno come immagine  $a$ . In generale, siccome  $A$  e  $B$  sono due insiemi finiti e la cardinalità di  $A$  è maggiore di quella di  $B$ , non esistono funzioni iniettive da  $A$  in  $B$ , e quindi nemmeno funzioni biiettive.
3. Fissiamo l'attenzione sulla mattonella in cui cade il centro della moneta. La moneta non taglia i lati dei quadrati se il centro della moneta dista dal bordo della mattonella più del raggio della moneta, come nel caso  $C2$  della figura 8. Il quadrato più interno, in cui devono cadere i centri delle monete, ha come lato la differenza tra il lato della piastrella e il diametro della moneta. La pro-

babilità richiesta è il rapporto tra l'area del quadrato interno e l'area della pia-  
strella:

$$p = \frac{(10 - 2,575)^2}{10^2} = 0,5513\dots$$

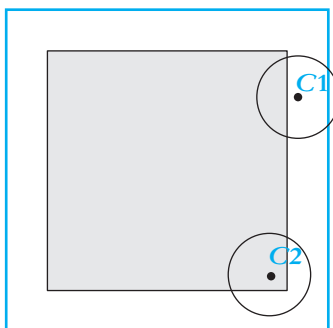


Figura 8

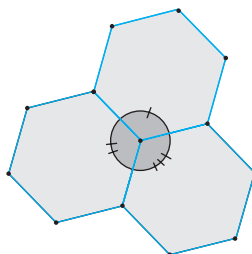


Figura 9

4. Per costruire un poliedro è necessario che in ogni vertice convergano almeno tre facce e per «chiudere» il poliedro è necessario che la somma degli angoli interni di queste facce sia minore di  $360^\circ$  (altrimenti il poliedro risulterebbe concavo). Le facce di un poliedro regolare sono poligoni regolari. Siccome un esagono regolare ha gli angoli interni di  $120^\circ$ , accostandone tre in modo che abbiano un vertice in comune (figura 9), la somma dei tre angoli con questi vertici è  $360^\circ$ ; si crea così una tassellazione del piano, ma non si ottiene un poliedro.

5. Si rinvia alla risoluzione del quesito con lo stesso numero nel tema di ordinamento.

6. L'equazione della retta tangente al grafico di  $\sin x$  nel punto  $Q_1(3, \sin 3)$  è  $y = \sin 3 + \cos 3 \cdot (x - 3)$ ; tale retta interseca l'asse  $x$  in  $P_1\left(3 - \frac{\sin 3}{\cos 3}, 0\right)$ , ovvero,

considerando otto cifre decimali,  $P_1(3,14254654, 0)$ .

Calcolando l'equazione della retta tangente al grafico di  $\sin x$  nel punto  $Q_2(3,14254654, \sin 3,14254654)$  e trovandone l'intersezione con l'asse  $x$ , abbiamo:

$$P_2\left(3,14254654 - \frac{\sin 3,14254654}{\cos 3,14254654}, 0\right), \text{ cioè } P_2(3,14159265, 0).$$

Lo zero di  $\sin x$  che abbiamo così approssimato è ovviamente  $\pi$ , le cui prime otto cifre decimali sono proprio quelle trovate.

7. Si rinvia alla risoluzione del quesito con lo stesso numero nel tema di ordinamento.
8. Indichiamo con  $n$  il numero degli uomini e con  $A_n$  la somma delle loro età, indichiamo poi con  $m$  il numero delle donne e con  $B_m$  la somma delle loro età. Il quesito chiede il rapporto  $n/m$ . Riscriviamo i dati:

dal fatto che l'età media degli uomini è 26 segue che  $\frac{A_n}{n} = 26$ ;

dal fatto che l'età media delle donne è 19 segue che  $\frac{B_m}{m} = 19$ ;

dal fatto che l'età media complessiva è 22 segue che  $\frac{A_n + B_m}{n + m} = 22$ .

Ricaviamo  $A_n$  e  $B_m$  dalle prime due uguaglianze; sostituendo nella terza, otteniamo:  $\frac{26n + 19m}{n + m} = 22$ . Moltiplicando ambo i membri per  $n + m$ , abbiamo  $4n = 3m$  e quindi  $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$ .

9. Si rinvia alla risoluzione del quesito con lo stesso numero nel tema di ordinamento.
10. La proposizione è il *quinto postulato* di Euclide, praticamente nella stessa forma in cui venne espresso dal matematico greco nel 300 a.C. negli *Elementi*. Esistono decine di forme equivalenti del postulato, tra cui quella più comune è «Data una retta  $r$  e un punto  $P$ , c'è al più una retta passante per  $P$  e parallela a  $r$ ». Questo postulato differisce dai precedenti che esprimono proprietà sostanzialmente ovvie per la nostra intuizione; ciò giustifica gli sforzi che si sono compiuti per dimostrare l'unicità della parallela.

I numerosi tentativi di dimostrare il quinto postulato a partire dai precedenti hanno dato un inconsapevole impulso alla nascita delle geometrie non euclidee; ma fu solo nella prima metà del XIX secolo che Gauss, Bolyai e Lobacevskij misero fine a tutti i tentativi formalizzando una geometria in cui valgono tutti i postulati tranne il quinto. In particolare, in *geometria iperbolica* per un punto esterno a una retta passa più di una retta parallela alla retta data, ovvero, riprendendo la formulazione del testo, non è detto che le due semirette citate si incontrino.

## CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Entrambi i problemi sono suddivisi in quattro parti indipendenti l'una dalle altre: questo è un fatto positivo, che, sebbene previsto dalle indicazioni ministeriali del 2000, non si era sempre verificato in precedenza.

Il problema 1 è un interessante susseguirsi di risultati che richiedono una discreta padronanza dell'Analisi matematica studiata nell'ultimo anno del Liceo

scientifico. Il testo, così come è formulato, parte da un caso generale, che sembra più complesso di quanto non sia, per arrivare in seguito allo studio di una funzione standard. Per non scoraggiare gli studenti meno sicuri, sarebbe stato forse preferibile partire dalla funzione richiesta al punto 3 e proporre gradualmente generalizzazioni.

Il problema offre ulteriori spunti di indagine: oltre all'ampliamento proposto nella soluzione del punto 2, osserviamo che la successione di funzioni

$f_n(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \cdot e^{-x}$  converge a 1, cioè  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ . In effetti, sapendo

che  $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ , si intuisce che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$ . Una dimostrazione formale

di questo fatto non è banale; tuttavia, sarebbe interessante impostare un'attività di laboratorio che guidi gli allievi alla scoperta delle proprietà della successione di funzioni  $f_n$  attraverso la costruzione e l'esplorazione di una figura dinamica come nella figura 10.

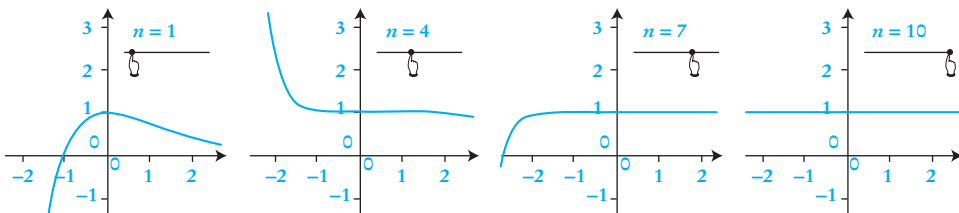


Figura 10

Il problema 2 è un classico, «la solita cubica ...». Il livello di difficoltà cresce man mano che il problema va avanti; l'ultimo punto richiede la capacità di comprendere il testo, una visione della situazione nello spazio, oltre al sicuro possesso delle tecniche del Calcolo.

In generale osserviamo che entrambi i problemi affondano le loro radici nell'Analisi matematica e la cosa non è usuale; negli anni precedenti, in almeno uno di essi si chiedeva, se non altro nella fase iniziale, di affrontare situazioni problematiche con gli strumenti della Geometria analitica o della Trigonometria. Questi due rami della Matematica non sono presenti nemmeno nei quesiti, cosicché la loro importanza nel percorso scolastico sembrerebbe uscire ridimensionata da questo esame di Stato; sarà davvero così?

I quesiti riguardano generalmente questioni interne alla Matematica; se escludiamo il quesito 8, non troviamo situazioni verosimili o che prendano spunto dal mondo reale. Alcuni quesiti sono senz'altro accessibili per gli studenti di quinta; in particolare:

- l'1, che richiede una comprensione grafica dell'integrale proposto;
- il 2, la cui stesura sarebbe stata da curare maggiormente (specificando che  $A$  è il dominio della funzione), ma che in fondo indaga solamente la comprensione di definizioni indubbiamente importanti, ma che non tutti i testi forniscono;
- il 3, che ha solo l'apparenza di una domanda di probabilità, perché si traduce in un problema di geometria;
- il 7, un banale conto di calcolo combinatorio che non riveste un gran significato matematico;
- l'8, che è un bel quesito sulle medie, richiede di saper tradurre un problema non interno alla matematica in espressioni algebriche; per arrivare al risultato sono anche necessarie discrete capacità nel manipolare i simboli.

Altri quesiti si fondano su conoscenze che non sempre vengono proposte agli studenti: i poliedri regolari, il metodo di approssimazione con le tangenti di Newton, le geometrie non euclidee, per non parlare del principio di Cavalieri. In particolare, il quesito 10, sulle geometrie non euclidee, controlla la conoscenza di un celebre problema della storia della geometria, ma non consente di testare alcuna abilità o competenza matematica; inoltre è difficile da valutare perché non è chiaro quale sia la risposta attesa: gli studenti potrebbero rispondere con due righe o con un intero trattato.

Mancano invece argomenti che dovrebbero rivestire un ruolo importante nella matematica che si insegna nella sperimentazione PNI: le trasformazioni geometriche, le matrici, la probabilità (in casi non banali).

Ancora una volta è quindi necessario sottolineare l'imbarazzo da parte dei docenti, che non sanno che cosa insegnare ai propri allievi per dar loro la possibilità di affrontare serenamente la prova e che, come novelli indovini, cercano di ipotizzare dai testi degli esami degli anni precedenti come sarà la prova dell'anno successivo. È da tempo che viene richiesto un *syllabus* che precisi quali sono gli argomenti su cui verte la prova; quest'anno ci sono stati segnali che fanno pensare che forse qualcosa si sta muovendo. Chissà che l'anno prossimo non ci siano novità!

---

**Cristiano Dané**

Liceo Scientifico A. Volta, Torino  
cristiano.dane@virgilio.it

---