ESAMI DI STATO 2001
SECONDA PROVA SCRITTA PER L'ISTITUTO MAGISTRALE DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva i seguenti problemi:

1. La misura, in *decimetri*, del raggio di una sfera è data dalla soluzione dell'equazione:

$$(x-1)^3 + x^2 = x(x-1)^2 + 4.$$

Nella sfera sono inscritti due coni *circolari retti* aventi la base comune e le superfici laterali nel rapporto $\frac{3}{4}$.

Il candidato calcoli:

a) il rapporto tra i volumi dei due coni;

b) la misura del raggio della base comune dei coni;

c) il peso, approssimato ai *grammi*, del solido costituito dai due coni, supposto che sia realizzato con legno di noce di peso specifico 0,82.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:

a) Se a e b sono numeri diversi da zero e diversi tra loro, si ha:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \tag{1}$$

Come va corretta la (1) se si elimina la condizione per a e b di essere «diversi tra loro»?

b) Il numero decimale periodico misto $1,2\overline{3}$ (periodo 3) ha $\frac{118}{99}$ come frazione generatrice.

c) Un numero di tre cifre tutte uguali è divisibile per 37.

Durata massima della prova: 4 ore.

Era consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Questo è stato l'ultimo anno per il corso magistrale, ed i temi di matematica per la seconda prova scritta, sia di ordinamento che sperimentale PNI, hanno seguito la tipologia degli anni precedenti: un problema di geometria solida e tre proposizioni delle quali bisogna stabilire i valori di verità.

Il compito è abbastanza semplice, anche se alcuni quesiti sono formulati in maniera poco chiara.

SOLUZIONI

1. Risolvendo l'equazione ci si accorge che è di primo grado ed ha soluzione $x = 2{,}5$. Infatti, con semplici passaggi da

$$(x-1)^3 + x^2 = x(x-1)^2 + 4$$

si ottiene
$$2x = 5.$$

Il diametro della sfera misura allora 5 dm.

Chiamiamo W_1 e W_2 i vertici dei due coni (W_1 il vertice del cono più piccolo) e facciamo riferimento alla fig. 1. Dal fatto che i due solidi hanno la base in comune, si deduce che:

– il rapporto tra i volumi è uguale al rapporto tra le altezze;

– il rapporto tra gli apotemi AW_1 ed AW_2 è uguale al rapporto tra le superficie laterali, cioè a 3/4.

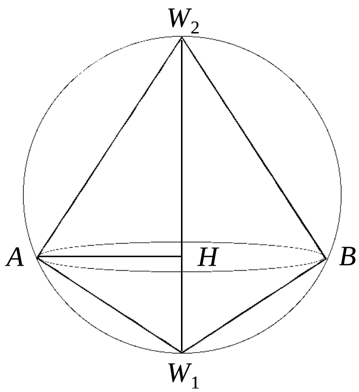

Figura 1

Applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo AW_1W_2, prima relativamente al cateto AW_1 e poi al cateto AW_2, si ottiene:

$$AW_1^2 = W_1H \; W_1W_2 \qquad AW_2^2 = W_2H \; W_1W_2$$

Siamo ora in grado di calcolare il rapporto tra le altezze, e dunque tra i volumi V_1 e V_2, dei due coni:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{W_1H}{W_2H} = \frac{W_1H \; W_1W_2}{W_2H \; W_1W_2} = \frac{AW_1^2}{AW_2^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Per rispondere al quesito b, ci sono più metodi. Sapendo che nel triangolo rettangolo AW_1W_2 l'ipotenusa è 5 dm e il rapporto fra i cateti è 3/4, si deduce facilmente AW_1 = 3 dm ed AW_2 = 4 dm. Ora, la doppia area del triangolo AW_1W_2 si può esprimere in due modi:

$$AH \cdot W_1W_2 = AW_1 \cdot AW_2$$

da cui si ricava AH = 2,4 dm.

Un altro metodo consiste nel calcolare le due altezze HW_1 ed HW_2 (di cui conosciamo somma e rapporto) e quindi applicare il secondo teorema di Euclide.

Veniamo adesso all'ultima questione. Partendo dal volume scritto in dm^3 otteniamo il peso del solido composto in kg. Poiché è richiesto il peso approssimato ai grammi, dobbiamo fornire la terza cifra decimale. Per quanto riguarda il valore del peso specifico assegnato nel problema, si capisce che è dato in $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ cioè in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi \;\; AH^2 \;\; (W_1H + W_2H)}{3} = \frac{\pi \;\; AH^2 \;\; W_1W_2}{3} = \pi \;\; \frac{48}{5} \text{dm}^3;$$

$$P = P_s \;\; V = (0{,}82 \;\; \frac{48}{5}\pi)kg \approx 0{,}82 \;\; 9{,}6 \;\; 3{,}1416\,kg \approx 24{,}731\,kg$$

dove l'approssimazione è fatta a meno di un grammo.

Come abbiamo detto, per trovare il peso con l'approssimazione richiesta occorre fornire la terza cifra decimale. Si deve allora fare attenzione al valore approssimato di π: se si assume come al solito 3,14, l'errore supera i 10 grammi, mentre l'errore è minore di un grammo se si arriva alla quarta cifra decimale di π; naturalmente non c'è alcun problema se si svolge il calcolo usando il valore di π fornito da una normale calcolatrice tascabile. È dubbio che la richiesta fosse fatta al fine di valutare un'idonea approssimazione di π; sembra più probabile che si volesse controllare se gli studenti erano in grado di ottenere un peso in grammi a partire da un volume espresso in dm^3.

Riteniamo che le Commissioni non abbiano penalizzato gli studenti che hanno posto π = 3,14. Del resto, la richiesta di approssimazione ai grammi per un oggetto di circa 24 kg sembra eccessiva e, d'altra parte, sarebbe stato allora preferibile scrivere anche il peso specifico nella forma 0,8200.

2. a) Nel rispondere a questa prima domanda dobbiamo specificare l'insieme numerico al quale appartengono a e b. Se supponiamo che a e b siano numeri (reali) *positivi*, allora l'enunciato è vero. Infatti

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} > \frac{2ab}{ab} \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq b$$

Se poi eliminiamo la condizione $a \neq b$, allora la (1) si deve correggere così:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Se invece supponiamo che a e b siano numeri *relativi*, allora enunciato è falso. Infatti se a e b sono due numeri discordi ($ab < 0$) la disequazione non è mai verificata. La dimostrazione è analoga al caso precedente, con l'unica accortezza che per eliminare i denominatori si moltiplica per ab, e quindi occorre cambiare il verso della disuguaglianza.

La seconda domanda induce a pensare che l'intenzione di chi ha posto il problema non era tanto chiedere se l'enunciato fosse vero, ma piuttosto stabilire per quali valori numerici fosse verificata la disequazione. Solo così ha senso chiedere come vada aggiustata la (1) nel caso in cui si elimini la condizione $a \neq b$.

La mancata specificazione dell'insieme numerico al quale appartengono a e b, se da un lato offre lo spunto allo studente brillante per una trattazione esaustiva dei vari casi, pone comunque un problema di valutazione. Come si può non dare punteggio pieno a chi si sia limitato a discutere il quesito considerando a e b numeri naturali? O a chi abbia scritto soltanto «la proposizione è falsa: basta prendere $a = 1$, $b = -1$»?

b) Falso. Infatti si ha

$$1{,}2\overline{3} = \frac{123 - 12}{90} = \frac{111}{90} \neq \frac{118}{99}$$

c) L'enunciato è vero. Infatti, ogni numero del tipo *nnn* è il multiplo secondo n di $111 = 3 \cdot 37$. Allora $nnn = n \cdot 3 \cdot 37$ è divisibile per 37 ed il quoziente vale $3n$.

La dizione «*un* numero», che compare nel testo, non è del tutto appropriata, in quanto non si specifica chiaramente se si tratta di un quantificatore esistenziale («*esiste* un numero») o, come è presumibile nel caso in esame, di un quantificatore universale («*ogni* numero»).

MICHELA BARSANTI
Liceo Ginnasio Mamiani
Viale delle Milizie 30 – Roma