



## ESAMI DI STATO 2001 SECONDA PROVA SCRITTA PER L'ISTITUTO MAGISTRALE SPERIMENTALE (PNI)

*Il candidato risolva le seguenti questioni:*

1. Nel triangolo  $ABC$ , rettangolo in  $A$ , si ha che  $\overline{AB} = 2\overline{AC}$ ,  $\overline{BC} = a$ , essendo  $a$  una lunghezza nota.

a) Stabilire se la bisettrice  $AD$  e la mediana  $CE$  del triangolo sono perpendicolari o no e darne esauriente spiegazione.

b) Dopo aver riferito il piano del triangolo  $ABC$  ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare le coordinate dei punti  $A, B, C$  e del punto in cui si secano le rette  $AD$  e  $CE$ .

c) Preso un punto  $F$  sulla retta condotta per  $E$  perpendicolarmente al piano del triangolo  $ABC$  in modo che sia  $\overline{EF} = \frac{4a}{\sqrt{5}}$ , calcolare la distanza del punto  $A$  dal piano  $BCF$ .

d) Dell'angolo formato dai due piani  $BCF$  e  $ABC$  calcolare l'ampiezza espressa in gradi sessagesimali e approssimata a meno di 1 grado.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri o falsi motivando esaurientemente la risposta:

a) Posto che  $a$  sia un numero reale qualsiasi, risulta:

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1} = a + 1$$

b) Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{n^2} = 0$$

c) Si considera l'esperimento del lancio di una moneta «Testa Croce» con le due facce che hanno le stesse possibilità di uscita. La probabilità che in quattro lanci esca «Testa» al più due volte è minore di quella che esca «Testa» almeno due volte.

Durata massima della prova: 4 ore.

Era consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Rispetto al tema visto nell'articolo nel n. 4 del 2001 a p. 204, il tema assegnato per il corso magistrale sperimentale PNI è più chiaro, ma contiene alcune domande decisamente impegnative. La prima parte del problema, riguardante la geometria piana, è piuttosto semplice. La seconda, invece, prende in considerazione lo spazio a 3 dimensioni e richiede la capacità di visualizzare configurazioni formate da rette e piani nello spazio.

I quesiti non sono difficili, anche se probabilmente diversi studenti li avranno trovati ingannevoli.

SOLUZIONI

1. a) Il triangolo  $AEC$  rettangolo in  $A$  è isoscele, dunque la bisettrice dell'angolo al vertice coincide con l'altezza relativa alla base  $CE$ , il che assicura la perpendicolarità fra  $AD$  e  $CE$ . Si possono trovare numerose dimostrazioni alternative tutte semplici.

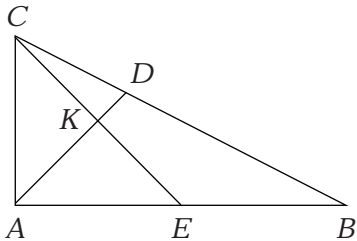


Figura 1

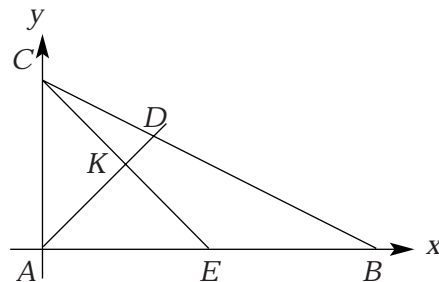


Figura 2

Per il seguito è opportuno tener presente che  $AC = a/\sqrt{5}$  e che  $AB = 2a/\sqrt{5}$  (non distinguiamo tipograficamente fra i segmenti e le rispettive misure).

b) Consideriamo il riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine il punto  $A$ , unità di misura pari alla lunghezza  $AC$  (cioè uguale ad  $a/\sqrt{5}$ ), con  $B$  giacente sul semiasse positivo delle ascisse e  $C$  giacente sul semiasse positivo delle ordinate, come in figura 2. Nel nostro sistema di riferimento abbiamo allora:  $A = (0; 0)$ ,  $B = (2; 0)$ ,  $C = (0; 1)$ .

Le coordinate del punto  $K$  si trovano risolvendo il sistema composto dalle equazioni delle due rette  $AD$  e  $CE$ . Le equazioni sono rispettivamente quella della bisettrice  $y = x$  e quella della sua perpendicolare (dunque con coefficiente angolare pari a  $-1$ ) con ordinata all'origine pari a 1:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x \end{cases} \quad \text{da cui si ricava} \quad K = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Allo stesso risultato si arriva più rapidamente osservando che  $AK$  è anche mediana del triangolo isoscele  $AEC$ , e dunque  $K$  è il punto medio del segmento  $CE$ .

c) Le ultime due domande del problema sono nettamente più difficili. Indichiamo con  $L$  il piede della perpendicolare condotta dal punto  $E$  alla retta  $BC$  nel piano  $ABC$  (fig. 3). Per il teorema delle tre perpendicolari, il piano  $FEL$  è perpendicolare alla retta  $BC$ ; lo stesso piano  $FEL$  è perpendicolare anche al piano  $ABC$  poiché passa per la retta  $FE$  normale ad  $ABC$ . Se ne deduce che:

- $FL$  è l'altezza del triangolo  $FBC$  rispetto alla base  $BC$ ;
- $FLE$  è una sezione normale del diedro di cui alla successiva domanda d).

Per determinare la distanza  $AH$  del punto  $A$  dal piano  $BCF$ , il metodo più semplice consiste nel ricorrere alla geometria analitica ed applicare la formula che fornisce la distanza di un punto da un piano; tale formula, tuttavia, è raramente presentata nelle Scuole Superiori. Un altro metodo, forse più alla portata degli studenti, consiste nel ricavare il volume del tetraedro  $ABCF$  (fig. 3). Si ha infatti:

$$(*) \quad 3 \text{ volume } (ABCF) = \text{area } (ABC) \cdot FE = \text{area } (FBC) \cdot AH.$$

Si trova senza difficoltà

$$\text{area } (ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{5}$$

mentre un po' più laborioso è il calcolo dell'area di  $FBC$  (e non conviene applicare la formula di Erone, perché i calcoli diventano piuttosto complicati). Sfruttando la similitudine dei triangoli  $BEL$  e  $BCA$  si trova che  $EL = a/5$ . Se ne ricava:

$$\text{area } (FBC) = \frac{1}{2} BC \cdot FL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{FE^2 + EL^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{16a^2}{5} + \frac{a^2}{25}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{81}{25}} a^2 = \frac{9}{10} a^2.$$

Sostituendo nella (\*), si ottiene

$$\frac{a^2}{5} \cdot \frac{4a}{\sqrt{5}} = AH \cdot \frac{9a^2}{10}$$

da cui

$$AH = \frac{8a}{9\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{45} a$$

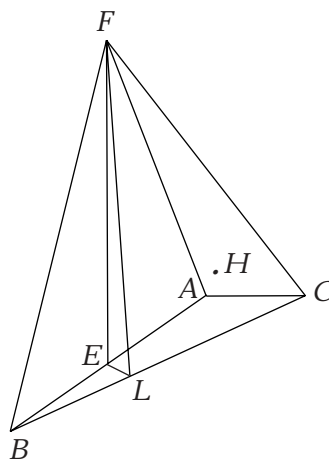


Figura 3

d) Calcoliamo l'ampiezza dell'angolo diedro formato dai due piani  $BCF$  ed  $ABC$  come ampiezza della sezione normale  $FLE$ . Consideriamo allora il triangolo  $FEL$ , rettangolo in  $E$ , di cui conosciamo le lunghezze dei lati: in particolare, come abbiamo visto nel calcolo dell'area del triangolo  $FBC$ , l'ipotenusa  $FL$  misura  $9a/5$ .

Sapendo che il seno di un angolo acuto in un triangolo rettangolo è pari al rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa, troviamo:

$$\sin \hat{FLE} = \frac{FE}{FL} = \frac{4a}{\sqrt{5}} : \frac{9a}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

La funzione inversa fornisce l'ampiezza cercata.

$$\hat{FLE} = \arcsin \frac{4\sqrt{5}}{9} = 83,62\dots^\circ \approx 84^\circ.$$

Quest'ultimo calcolo richiede il supporto di una calcolatrice tascabile. Senza calcolatrice, si poteva osservare che  $\hat{FLE} = \arccos(1/9)$  e quindi il suo complementare è l'arco il cui seno è uguale ad  $1/9$ ; si tratta di un angolo piuttosto piccolo, per il quale l'ampiezza in radianti non si discosta sostanzialmente dal valore del seno. Si trova così  $\hat{FLE} \approx 90^\circ - \frac{1}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 83,63\dots^\circ$ : l'approssimazione è in effetti molto buona, ma valutare l'errore commesso (per assicurarsi di aver trovato l'ampiezza approssimata a meno di 1 grado) non è alla portata degli studenti.

2. a) Falso. Se sostituiamo ad  $a$  ad esempio il valore  $-3$  otteniamo  $2 = -2$ . Con ogni probabilità, chi ha posto il quesito voleva verificare se l'alunno sapeva che

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a + 1|.$$

In effetti, l'uguaglianza proposta è falsa per ogni  $a < -1$ .

b) Falso. Infatti al numeratore compare la nota somma di Gauss:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dunque si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

c) Falso. La probabilità che in 4 lanci esca Testa al più due volte è uguale alla probabilità che esca Croce almeno due volte, che a sua volta è uguale alla probabilità che esca Testa almeno due volte, poiché Testa e Croce sono equiprobabili. Cioè si ha:

$$\text{prob}(\#T \leq 2) = \text{prob}(\#C \geq 2) = \text{prob}(\#T \geq 2).$$

MICHELA BARSANTI

Liceo Ginnasio Mamiani – Viale delle Milizie 30 – Roma  
 michelabarsanti@virgilio.it