



ESAME DI STATO 2002 SECONDA PROVA SCRITTA PER IL LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}$.

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y , sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x .

e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} < x < 0$.

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$[1] \quad a + 2x, \quad a - x, \quad 2a - x,$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.



c) Verificato che per $x = a/4$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a : calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC .

QUESTIONARIO

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A e A' e volumi V e V' . Si sa che $A/A' = 2$. Calcolare il rapporto V/V' .

3. Considerati i numeri reali a, b, c, d – comunque scelti – se $a > b$ e $c > d$, allora:

- A) $a + d > b + c$;
- B) $a - d > b - c$;
- C) $ad > bc$;
- D) $a/d > b/c$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4. Si consideri la seguente proposizione: «La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica». Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5. Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

6. Si consideri la funzione: $f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5$.

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $1/2 < x < 2$.

7. Calcolare la derivata, rispetto ad x , della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

8. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1, 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(1, 3)$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 < f'(x) < 2$ per ogni x dell'intervallo $(1, 3)$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 < f(3) < 5$.



9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano la seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

- A) un punto;
- B) due punti;
- C) infiniti punti;
- D) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) dx = a, \quad \int_0^6 f(x) dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2, \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4.$$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Risoluzioni

Problema 1

a) La funzione f è definita in $\mathbb{R} - \left\{ -\sqrt[3]{2} \right\}$ e si ha $f(x) > 0$ se $x > -\sqrt[3]{2}$, mentre $f(x) < 0$ se $x < -\sqrt[3]{2}$.

b) Il punto P di k di ascissa -1 ha ordinata 3 . La derivata prima di f è $f'(x) = -\frac{x(x^3 + 6x - 4)}{(x^3 + 2)^2}$ ed il coefficiente angolare della retta t tangente a k in P è $f'(-1) = -11$. La retta tangente in P alla parabola cercata ha quindi coefficiente angolare $1/11$. Quest'ultima condizione, con quella dovuta al passaggio per P , permette di ricavare l'equazione richiesta: $y = -34x^2/11 - 67x/11$. (Si veda la fig. 1).

c) La retta t , tangente a k nel punto P , ha equazione $y = -11x - 8$. Dal sistema formato dalle equazioni di k e t si ottiene $11x^4 + 8x^3 + x^2 + 22x + 18 = 0$. Poiché $x = -1$ è una radice doppia (in virtù della condizione di tangenza in P),



l'equazione si riduce a $(x+1)^2(11x^2 - 14x + 18) = 0$. Pertanto il sistema non ha altre soluzioni reali oltre all'ascissa di P stesso, che è l'unico punto in comune tra k e t .

d) Si tratta di risolvere l'equazione $f(x) = 0$, ovvero $x(x^3 + 6x - 4) = 0$, che ha la soluzione 0, corrispondente al punto di k di coordinate $(0, 1)$. L'equazione di terzo grado residua, $x^3 + 6x - 4 = 0$, possiede almeno una soluzione reale, avendo grado dispari. Poiché la funzione polinomiale $p(x) = x^3 + 6x - 4$, associata all'equazione, ha derivata ovunque positiva, essa è strettamente crescente ed il suo grafico interseca in un solo punto l'asse x . Si ha $p(0) = -4 < 0$ e $p(1) = 3 > 0$, quindi è compreso tra 0 e 1. Mediante un metodo numerico, ad esempio quello di bisezione, si trova che il valore di x è circa 0.6258. In conclusione la curva k ammette retta tangente parallela all'asse x in due punti.

e) Il teorema di Lagrange non è applicabile alla funzione f nell'intervallo $[-\sqrt{2}, 0]$ perché essa non è definita nel punto di ascissa $-\sqrt[3]{2}$, interno all'intervallo, e in ogni intorno di tale punto f non è limitata.

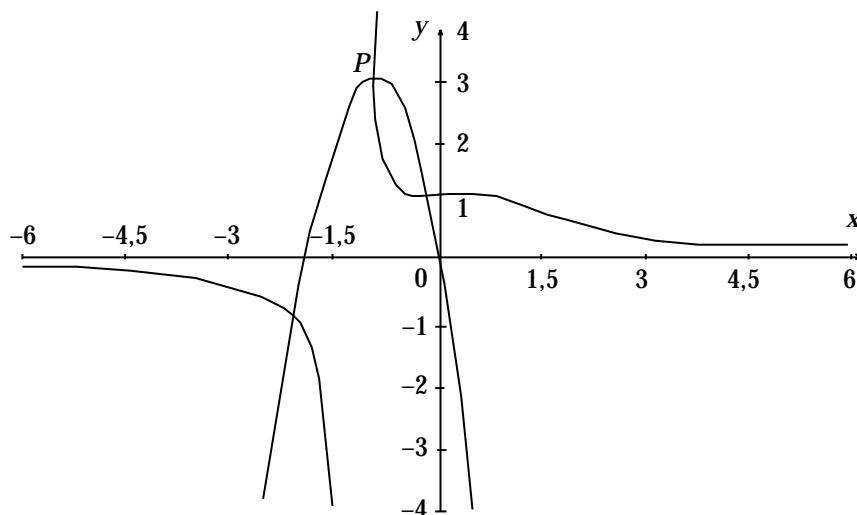


Figura 1. Grafici della curva assegnata e della parabola richiesta.

Problema 2

a) Oltre alla condizione $x > 0$, le tre lunghezze assegnate devono essere positive per poter rappresentare i lati di un triangolo non degenere, pertanto si deve avere $0 < x < a$. Affinché le tre lunghezze corrispondano poi effettivamente ai lati di un triangolo, ciascuna di esse deve essere minore della somma delle altre due, il che equivale a dire che ogni lato deve essere minore del semiperimetro. Si hanno quindi le disuguaglianze $a + 2x < 2a$, $a - x < 2a$, $2a - x < 2a$, che equivalgono all'unica condizione $0 < x < a/2$.



b) Non c'è un valore minimo per l'area dei triangoli i cui lati hanno le lunghezze espresse dalle formule [1], con $0 < x < a/2$. Infatti, se $x \rightarrow 0^+$ oppure se $x \rightarrow a/2$, il triangolo corrispondente tende a diventare degenere, con un lato uguale alla somma degli altri due e l'area 0: nel primo caso, le tre lunghezze tendono ai valori $a, a, 2a$ e nel secondo caso ai valori $2a, a/2, 3a/2$. L'espressione funzionale in x dell'area A del triangolo, ricavata mediante la formula di Erone, è $A(x) = \sqrt{2ax(a-2x)(a+x)}$ e tende proprio a 0 se $x \rightarrow 0^+$ oppure se $x \rightarrow (a/2)^-$

(0 è quindi l'estremo inferiore dei valori di $A(x)$ se $0 < x < a/2$). Per stabilire se la funzione continua $A(x)$ ammette invece massimo nell'intervallo aperto $(0, a/2)$, si osserva che alla funzione $A^*(x)$, prolungamento continuo di $A(x)$ nell'intervallo chiuso $[0, a/2]$, si può applicare il teorema di Weierstrass. Esso garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo assoluto per $A^*(x)$, che è evidentemente punto di massimo assoluto anche per $A(x)$, in $(0, a/2)$. Con il calcolo differenziale, eventualmente, si può calcolare per semplicità la derivata di $A^2(x) = 2ax(a-2x)(a+x)$, per stabilire che il valore massimo di $A(x)$ è

$$\frac{a^2}{3} \sqrt{\frac{7\sqrt{7}-10}{3}}, \text{ corrispondente ad } x = \frac{a\sqrt{7}-1}{6}.$$

c) Per $x = a/4$, le lunghezze [1], pari a $3a/2, 3a/4, 7a/4$, sono i lati di un triangolo non degenere. Partendo dalla lunghezza assegnata a , con riga e compasso si costruiscono il segmento di lunghezza $a/4$ e di seguito i tre lati del triangolo considerato, che sono suoi multipli secondo i coefficienti 6, 3 e 7. In seguito si punta il compasso in ciascuno dei due estremi del segmento maggiore, tracciando due circonferenze di raggio rispettivamente pari agli altri due segmenti. Le circonferenze tracciate si incontrano in due punti: uno qualsiasi di essi può servire come terzo vertice del triangolo richiesto. Poiché, qualunque sia $b > 0$, si ha $(3b)^2 + (6b)^2 < (7b)^2$, il triangolo citato è ottusangolo. Per il teorema del coseno, l'angolo maggiore ha coseno uguale a $-1/9$ e la sua ampiezza risulta circa di 96° .

d) La costruzione genera una piramide di base triangolare ed altezza AD . Detto H il piede dell'altezza relativa al lato BC del triangolo ABC , il piano passante per i punti A, D e H è perpendicolare ai piani ABC e BDC ; l'angolo richiesto è quello di vertice H del triangolo rettangolo AHD (si veda la fig. 2).

L'area di ABC vale $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$ e l'altezza AH misura $\frac{2a\sqrt{5}}{7}$. Poiché $\tan \hat{H} = 7\sqrt{5}/10$,

l'angolo \hat{H} misura circa $(1.002)^{\text{rad}}$. In gradi sessagesimali l'approssimazione intera più vicina è quella, per difetto, a 57° .

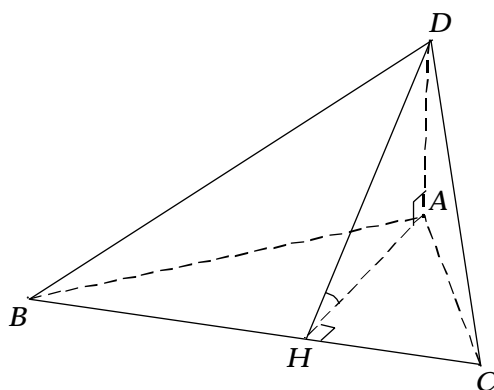


Figura 2. Angolo fra i due piani.

Questionario

1) Indicando con h l'altezza del trapezio isoscele assegnato, con b la base minore e con B la base maggiore, dal testo abbiamo $B = 4b$. La misura di ciascuna delle proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore è $(B - b)/2 = 3b/2$. Ruotando il trapezio di un giro completo attorno alla base maggiore si genera un solido composto da un cilindro di raggio di base h ed altezza b , sormontato da due coni uguali, di raggio di base h ed altezza $3b/2$. Il volume di tale solido è $2 h^2 b$. Nel caso in cui il trapezio ruoti di un giro completo attorno alla base minore, si genera un cilindro di raggio di base h ed altezza $B = 4b$, con due incavi conici di raggio di base h ed altezza $3b/2$. Il volume di tale solido è $3 h^2 b$. Il rapporto richiesto tra i due volumi è allora determinabile con i dati a disposizione e vale $2/3$. In relazione al calcolo di tale rapporto, si può per inciso notare che l'ipotesi che il trapezio sia isoscele (in particolare, che le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore siano uguali) è superflua, ferma restando la condizione $B = 4b$.

2) I due tetraedri regolari sono simili ed il rapporto tra le loro aree totali è uguale al rapporto tra l'area di una faccia del primo e l'area di una faccia del secondo. Quest'ultimo rapporto, ossia 2, è il quadrato del rapporto di similitudine lineare dei due solidi, pari a $\sqrt{2}$. Ne segue che il rapporto dei volumi è $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

3) L'alternativa corretta è la B). Partendo dalla disuguaglianza $c > d$, si ricava $-c < -d$, ovvero $-d > -c$. Aggiungendo membro a membro quest'ultima disuguaglianza con la disuguaglianza assegnata $a > b$, si giunge alla conclusione: $a - d > b - c$. D'altra parte, è semplice trovare un controesempio numerico per ciascuna delle rimanenti alternative.



4) Siano a e b i due numeri reali positivi assegnati. La loro media aritmetica è $(a + b)/2$, mentre la loro media geometrica è \sqrt{ab} . Ci si chiede se sia valida la disuguaglianza $(a + b)/2 > \sqrt{ab}$, ovvero $(a + b) > 2\sqrt{ab}$, per ogni a e b positivi. Elevando i due termini al quadrato si ottiene $(a - b)^2 > 0$, condizione sempre verificata, tranne che nel caso in cui sia $a = b$.

Dati allora due numeri reali positivi qualsiasi distinti, la loro media aritmetica è maggiore della loro media geometrica, mentre le due medie coincidono se essi sono uguali. Se ne deduce che la proposizione citata nel testo è, a rigore, falsa. (A tal proposito, si segnala la dimostrazione senza parole pubblicata sul n. 2 di «Archimede» del 2001, pag. 108.)

5) Addizionando le frazioni $\frac{a}{x-3}$ e $\frac{b}{x+1}$, si ottiene $\frac{(a+b)x + a - 3b}{(x-3)(x+1)}$, che deve dare luogo a $\frac{1}{x^2 - 2x - 3}$. Dato che le due frazioni hanno lo stesso denomi-

natore, affinché esse coincidano, i due polinomi al numeratore devono essere identici, ossia devono avere gli stessi coefficienti. Ciò equivale alle condizioni

$$\begin{aligned} a + b &= 1 & a &= 1/4 \\ a - 3b &= 1 & b &= -1/4 \end{aligned}$$

6) In base al teorema di Weierstrass la funzione f ha massimo e minimo assoluti nell'intervallo $[1/2, 2]$ poiché si tratta di una funzione continua (un polinomio di 12° grado in x) definita in un intervallo chiuso e limitato della retta dei numeri reali.

7) Servendosi delle proprietà della funzione integrale di una funzione continua ed effettuando un cambio di variabile, si può scrivere:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt = \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt + \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(1 + (x - 1)) \\ &= \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

A questo punto, applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ricava $f'(x) = \ln(1 + x) - \ln x = \ln \frac{1+x}{x}$, con $x > 0$.

8) In base alle ipotesi è lecito applicare il teorema di Lagrange ad $f(x)$ nell'intervallo $[1, 3]$. Si ha allora: $f(3) - f(1) = f'(\xi) \cdot (3 - 1) = 2 f'(\xi)$, con $\xi \in (1, 3)$, ovvero $f(3) = 1 + 2 f'(\xi)$, con $\xi \in (1, 3)$. Dal momento che abbiamo $0 < f'(\xi) < 2$, si ottiene $0 < 2 f'(\xi) < 4$ ed infine $1 < f(3) < 5$.



9) Imponendo le condizioni di non negatività dei radicandi, si ha $x^2 - 1 = 0$ e $1 - x^2 = 0$, ovvero $x^2 - 1 = 0$. L'unica possibilità è che risulti $x^2 - 1 = 0$, cioè che sia $x = 1$ oppure $x = -1$ (con $y = 0$ in entrambi i casi). Il grafico del luogo geometrico assegnato è costituito da due punti del piano, di coordinate $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, e la risposta corretta è la B).

10) Con il cambio di variabile $2x = t$, si ha:

$$f(2x)dx = f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} f(t)dt$$

Se x varia da 0 a 3, la nuova variabile t varia da 0 a 6 e

$$\int_0^3 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^6 f(t)dt = \frac{b}{2} = \ln 2, \text{ dunque } b = 2 \ln 2 = \ln 4. \text{ Inoltre}$$

$$\int_1^3 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_2^6 f(t)dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^6 f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt \right) = \frac{1}{2} (b - a) =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 4 - a) = \ln 4. \text{ Si ricava allora } \ln 4 - a = 2 \ln 4, \text{ cioè } a = -\ln 4.$$

Alcune considerazioni generali

La struttura della prova d'esame di matematica del Liceo scientifico di ordinamento per l'anno scolastico 2001/2002 ricalca quella dell'analoga prova del giugno 2001, quando ha fatto la sua comparsa per la prima volta un questionario, a fianco dei tradizionali problemi. I dieci quesiti proposti, ancora con l'indicazione di sceglierne e risolverne cinque, appaiono ragionevolmente semplici e trattano l'algebra elementare (quesiti 3, 4, 5 e 9), la geometria solida (quesiti 1 e 2) e gli argomenti di analisi sviluppati di norma durante il quinto anno di corso (quesiti 6, 7, 8 e 10). Si aggiunge che non è richiesto di ripetere la dimostrazione di nessuno dei teoremi più significativi del programma dell'ultimo anno, mentre sono assegnate due situazioni da investigare, nelle quali i candidati sono tenuti ad applicare il teorema di Weierstrass (quesito 6) ed il teorema di Lagrange (quesito 8). In effetti con il questionario si consente agli studenti di mostrare non soltanto le loro conoscenze in campo matematico, ma anche la capacità di servirsene all'occorrenza con un accettabile grado di autonomia. I due problemi assegnati, inoltre, pur rinunciando alla richiesta di uno studio di funzione completo, prevedono alcune domande che comunque fanno riferimento ai contenuti di analisi ed, allo stesso tempo, si orientano verso questioni geometriche ed algebriche il cui studio viene affrontato in momenti diversi del quinquennio liceale. In sostanza si può concludere che la traccia, variamente articolata e con diversi spunti di riflessione, risulta nel complesso equilibrata, in modo tale da offrire ad ogni candidato l'opportunità di mettere a frutto al meglio la propria preparazione.

PAOLO NARDINI

Liceo Scientifico Statale «Antonio Vallisneri», Lucca
paolon@liceo-vallisneri.lu.it