

ESAME DI STATO 2005, SECONDA PROVA SCRITTA PER I LICEI SCIENTIFICI DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy , ortogonale e monometrico, si consideri la regione R , finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R intorno all'asse y .
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R .
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t . Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.

4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n , l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C , dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \rightarrow +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

QUESTIONARIO

- Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\text{sen}18^\circ$, $\text{sen}36^\circ$.
- Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
- Si dimostri che la curva $y = x \text{sen } x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\text{sen } x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\text{sen } x = -1$.
- Si dimostri che fra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
- Il numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
- Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
- Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
- I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
- Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:

$$\text{sen}^2(35^\circ) + \text{sen}^2(55^\circ)$$
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
- Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \text{arctg } x - \text{arctg } \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

*Durata massima della prova: 6 ore.
 È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
 Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.*

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

- La parabola λ (figura 1) ha la concavità rivolta verso il basso, ha il vertice nel punto $(0; 6)$ ed interseca l'asse delle ascisse nei punti $(-\sqrt{6}; 0)$, $(\sqrt{6}; 0)$.

La prima richiesta consiste nel calcolo del volume del solido di rotazione ottenuto ruotando la regione R attorno all'asse y . Proponiamo due soluzioni.

a) Conviene invertire la funzione assegnata, cosa possibile poiché la funzione definita da 0 a $+\infty$ è monotona decrescente in senso stretto, e pertanto invertibile.

Limitandosi al caso $x > 0$, la funzione inversa ha equazione $x = \sqrt{6-y}$ con la condizione $y \leq 6$. Il volume del solido di rotazione è dato dal seguente integrale:

$$\pi \int_0^6 [x(y)]^2 dy = \pi \int_0^6 (6-y) dy = \pi \left[6y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^6 = 18\pi.$$

b) Un'altra via, seppur più complessa, consiste nell'usare il Teorema di Guldino. Il volume V è uguale a $2\pi \cdot G \cdot A$, dove G è la distanza dall'asse di rotazione del baricentro di una superficie di area A . Nel nostro caso l'area A della regione R è determinata mediante l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{6}} (6-x^2) dx = 4\sqrt{6}$$

oppure ricorrendo al Teorema d'Archimede come si vedrà nel punto 3. In generale,

l'ascissa del baricentro di un trapezoide è data da $\frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\text{area trapezoide}}$. Nel nostro caso,

$$\text{l'ascissa } G \text{ è } \frac{\int_0^{\sqrt{6}} x(6-x^2) dx}{\text{area } R} = \frac{\int_0^{\sqrt{6}} (6x-x^3) dx}{4\sqrt{6}} = \frac{9}{4\sqrt{6}}.$$

Il volume, di conseguenza, è $V = 8\sqrt{6}\pi G$; sostituendo, si ottiene $V = 18\pi$.

2. Conviene traslare la funzione $y = 6 - x^2$ nella direzione positiva dell'asse y , secondo l'equazione di traslazione $y' = y - 6$. Nel nuovo sistema Oxy si ottiene l'equazione $y = -x^2$.

Il volume V del solido generato per rotazione dal trapezoide limitato dalla parabola di equazione $y = -x^2$ è uguale a

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{6}} |-x^2|^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{36}{5} \pi \sqrt{6}.$$

Il volume del solido generato dalla regione R è la differenza tra il volume del cilindro di raggio 6 e altezza $\sqrt{6}$ ottenuto nella rotazione attorno al nuovo asse delle

ascisse e il volume V . Quindi, poiché $V_{\text{cilindro}} = 36\pi\sqrt{6}$, il volume cercato è

$$36\pi\sqrt{6} - \frac{36}{5} \pi \sqrt{6} = \frac{144}{5} \pi \sqrt{6}.$$

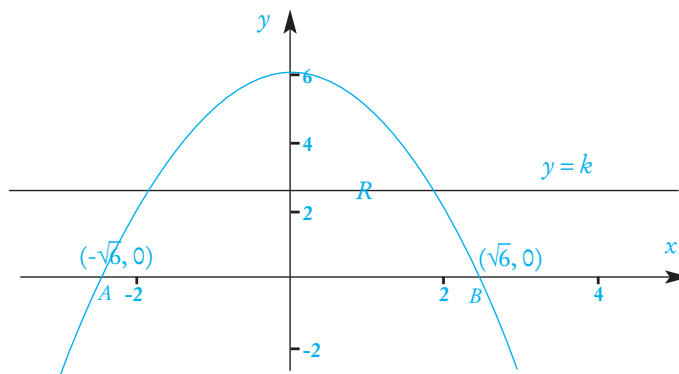


Figura 1

3. Anche per questo punto proponiamo due percorsi.

a) L'area della regione R è già stata calcolata precedentemente, ed è $4\sqrt{6}$. Lo stesso risultato si ottiene con il teorema di Archimede: l'area del *segmento parabolico* individuato dalla parabola e dall'asse x è $2/3$ dell'area del rettangolo circoscritto, e quindi è $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot 6 \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$.

Sempre mediante il teorema di Archimede si calcola l'area del segmento parabolico compreso tra la parabola e la retta di equazione $y = k$ (figura 1). Le coordinate dei punti di intersezione della retta $y = k$ con la parabola, che si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni di retta e parabola, sono $(-\sqrt{6-k}; k)$, $(\sqrt{6-k}; k)$. La relazione che consente di determinare k è quindi:

$$4\sqrt{6} = \frac{2}{3} 2\sqrt{(6-k)}(6-k) = \frac{4}{3}(6-k)^{3/2}, \text{ da cui } k = 6 - 3\sqrt[3]{2}.$$

b) Allo stesso risultato si perviene per integrazione, tenendo presente che la metà dell'area di R è $2\sqrt{6}$. Infatti, integrando si ottiene

$$\int_0^{\sqrt{6-k}} (6-x^2-k)dx = \left[6x - \frac{1}{3}x^3 - kx\right]_0^{\sqrt{6-k}} = 2\sqrt{6}, \text{ da cui } (\sqrt{6-k})^3 = 3\sqrt{6},$$

ed infine $k = 6 - 3\sqrt[3]{2}$.

4. Fissato l'intervallo $0 < t < \sqrt{6}$, si determina la derivata prima nel punto di ascissa generica t e si trova che $y'(t) = -2t$ è il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola (figura 2).

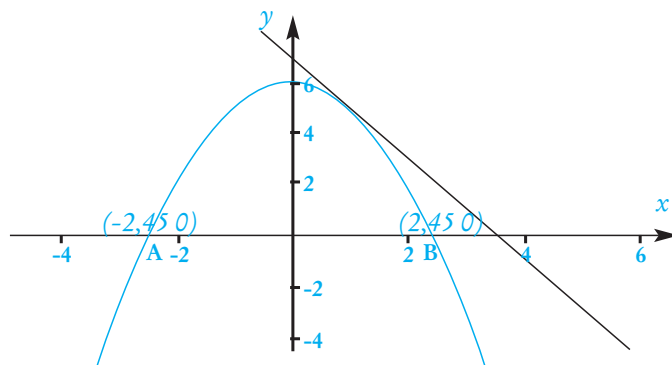


Figura 2

L'equazione della retta tangente nel punto $(t; 6 - t^2)$ è $y = -2tx + t^2 + 6$. I punti di intersezione con gli assi coordinati sono $(0; t^2 + 6)$, $(\frac{t^2 + 6}{2t}; 0)$. L'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla retta tangente alla parabola nel punto di ascissa t è $A(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 6)\left(\frac{t^2 + 6}{2t}\right) = \frac{(t^2 + 6)^2}{4t}$. Per $t = 1$ si ha $A(1) = \frac{49}{4}$.

5. Per determinare il valore minimo dell'area, deriviamo la funzione $A(t)$. Si ottiene

$$A'(t) = \frac{(t^2 + 6) \cdot 3(t^2 - 2)}{4t^2};$$

i punti critici corrispondono ai valori di t per cui si annulla $t^2 - 2$.

Nell'intervallo considerato abbiamo solo il valore $t = \sqrt{2}$ che corrisponde all'ascissa di un punto di minimo.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1. *Continuità.* Secondo la definizione di funzione continua si calcola il limite di $f(x)$ per x tendente a zero da destra. Si ha: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 2\ln x}{2x^{-2}} + 1 = 1$.

Il calcolo dell'ultimo limite può essere effettuato ricordando che $\ln x$, a numeratore, è un infinito di ordine inferiore rispetto all'infinito a denominatore. Alternativamente si può usare il teorema di de L'Hospital. Il limite coincide con la definizione della funzione in 0, la funzione è quindi continua in 0.

Derivabilità. Il problema, più delicato del precedente, può essere risolto per varie vie. Una possibilità è la seguente: si deriva la funzione $f(x)$ per $x > 0$, stu-

diando poi il comportamento della derivata effettuando il limite per x tendente a zero ⁽¹⁾.

La derivata prima della funzione $f(x)$ per $x > 0$ è

$$f'(x) = \frac{1}{2} 2x(3 - 2 \ln x) - x = 2x(1 - \ln x). \text{ Passando al limite, si ha}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{1 - \ln x}{x^{-1}} = 0. \text{ Questo limite coincide col valore della de-}$$

rivata in $x = 0$. La funzione $f(x)$ è quindi continua e derivabile in 0.

Alternativamente, utilizziamo la definizione di funzione derivabile a destra per la funzione $f(x)$ e calcoliamo il limite del rapporto incrementale destro:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 - 2 \ln h}{2h^{-1}} = 0 = f'(0).$$

Quest'ultima verifica della derivabilità di $f(x)$ in $x = 0$ soddisfa anche la richiesta di continuità in 0.

A questo punto è d'obbligo un'osservazione sulla definizione di «derivabilità» di una funzione in $x = 0$. L'esistenza del limite del rapporto incrementale per $h > 0$ garantisce l'esistenza della derivata destra di $f(x)$. Il quesito ha tuttavia generato qualche perplessità tra gli studenti e gli stessi docenti. La derivata in un punto x_0 è definita come il *limite* finito del rapporto incrementale della funzione in x_0 al tendere di x a x_0 . Rifacendoci alla definizione di limite, secondo la versione avallata da molti libri di testo, ciò sembrerebbe indicare che la funzione debba esser definita in un intorno *completo* del punto x_0 . Non esistendo un intorno completo, «non dovrebbe esistere la derivata in $x = 0$ »: qualche studente ha optato per questa scelta seguendo indubbiamente un filo logico coerente con le nozioni apprese. La questione può essere chiarita appellandoci alla lezione di Prodi ⁽²⁾: secondo la definizione di funzione reale derivabile in un sottoinsieme E di \mathbb{R} riportata nel testo, la funzione è derivabile in $x = 0$. Anche per altri Autori, è lecito parlare di derivata in un punto x_0 purché x_0 sia un punto non isolato del dominio di $f(x)$. La questione è interessante poiché pone il problema della correttezza e della coerenza delle definizioni.

La condizione di derivabilità è comunque strettamente condizionata dal fatto che la derivata sia *finita*. Talora si è rilevato, nelle soluzioni comparse nei quotidiani il giorno successivo alla prova, che la funzione veniva ritenuta derivabile in un punto anche se la derivata in quel punto fosse stata infinita.

⁽¹⁾ Stiamo applicando un teorema piuttosto intuitivo, ma che raramente viene enunciato in modo esplicito: se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a; b]$ ed è derivabile almeno in tutti i punti interni all'intervallo, e se esiste finito il limite L di $f'(x)$ per x tendente ad a , allora la funzione è derivabile anche in a e si ha $f'(a) = L$.

⁽²⁾ G. PRODI, *Analisi Matematica*, Boringhieri, 1977, Bologna. «Definizione: una funzione reale f definita in un insieme privo di punti isolati $E \subset \mathbb{R}$ si dirà derivabile in E se è derivabile in ogni punto di E . In particolare, f si dirà derivabile in un intervallo chiuso $[a; b]$ se è derivabile [...] in ogni punto interno di $[a; b]$ e se ammette derivata a destra in a e a sinistra in b entrambe finite».

2. L'equazione $f(x) = 0$ può essere posta nella forma $\ln x = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}$. Affrontiamo il problema dal punto di vista grafico. Riportiamo in un grafico cartesiano (figura 3) le due funzioni $y = \ln x$ e $y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}$, cercando i valori di x , con $x > 0$, tali che $\ln x = y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2}$. Sappiamo che mentre la prima funzione è *monotona crescente* in senso stretto, la seconda è *monotona decrescente* in senso stretto. Considerando i limiti per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$, si conclude che le due funzioni si intersecano in uno e un sol punto I di ascissa α .

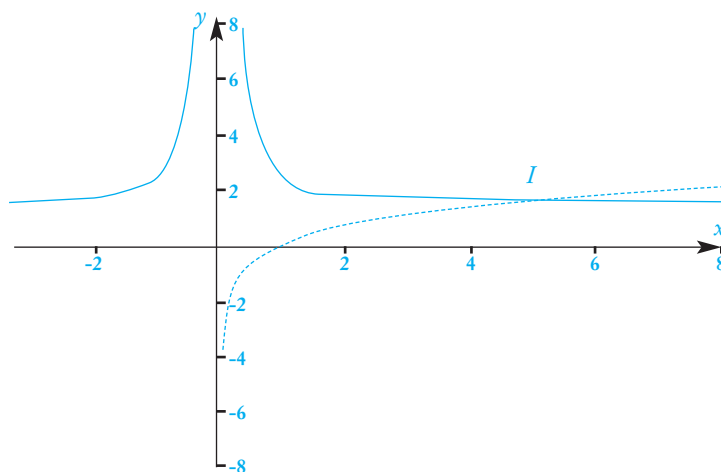


Figura 3

I valori della seconda funzione sono sempre maggiori di $\frac{3}{2}$; la soluzione α è quindi maggiore di $e^{\frac{3}{2}}$.

Il tema è proposto anche per l'indirizzo *PNI*, con la richiesta aggiuntiva di determinare una soluzione approssimata con *due cifre decimali esatte*. Usiamo il metodo delle tangenti di Newton, e quindi la relazione $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Per quanto visto, scegliamo il valore $x_0 = 4.5$, per cui

$$x = 4.5 - \frac{f(4.5)}{f'(4.5)} \cong 4.5 + 0.202 = 4.702;$$

iterando la procedura partendo da $x_0 = 4.7$ otteniamo circa $x = 4.69$. Si verifica che $f(4.69) \cong 0.00066$ mentre $f(4.7)$ è negativo.

Possiamo quindi assumere $x = 4.69$ come il valore approssimato richiesto.

3. Si richiede sostanzialmente di effettuare lo studio della funzione $f(x)$. Il dominio è \mathbb{R}^+ . Si ha una sola intersezione con l'asse y nel punto $(0; 1)$ ed una sola intersezione con l'asse x per $x = \alpha$. La funzione è positiva per $x < \alpha$ e negativa per $x > \alpha$.

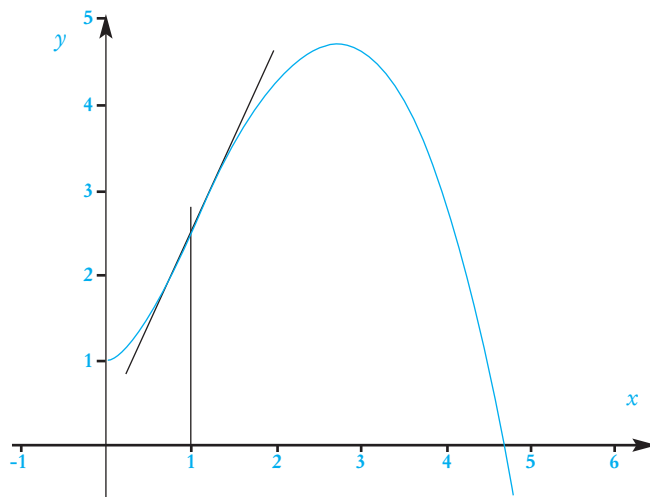


Figura 4

Inoltre, abbiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) = -\infty$. Vista la natura della funzione non esistono asintoti obliqui.

Per la ricerca di massimi e minimi, osserviamo che la derivata $f'(x) = 2x(1 - \ln x)$ si annulla per $x = 0$ e per $x = e$. La derivata è positiva per $0 < x < e$, negativa per $x > e$. Esiste perciò un massimo relativo nel punto $M\left(e; \frac{e^2}{2} + 1\right)$.

È possibile determinare il punto di flesso, pur se non richiesto, studiando zeri e segno della derivata seconda $f''(x) = -2 \ln x$. Si ha $f''(x) = 0$ per $x = 1$; l'unico punto di flesso è pertanto $F\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

Il grafico della funzione $f(x)$ è illustrato in figura 4.

La retta richiesta è la tangente nel punto di flesso ed ha equazione:

$$y - \frac{5}{2} = f'(1)(x - 1), \text{ ovvero, } y = 2x + \frac{1}{2}.$$

4. L'area del dominio piano A_n è determinata mediante integrale, dopo aver osservato che in $\left[\frac{1}{n}; 1\right]$ la curva è positiva e convessa:

$$A_n = \int_{1/n}^1 \left(\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x) + 1 - \left(2x + \frac{1}{2}\right) \right) dx = \int_{1/n}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + \frac{1}{2} - 2x \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \int_{1/n}^1 x^2 \ln x dx.$$

Tenendo presente che $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c$, segue infine che

$$A_n = -\frac{11}{18n^3} - \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{9}.$$

5. Il calcolo del limite dà $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{9}$. Questo è il valore di $\int_0^1 \left(f(x) - 2x - \frac{1}{2} \right) dx$,

integrale della differenza tra la funzione $f(x)$ e la retta $y = 2x + \frac{1}{2}$. Tale integrale esprime il valore dell'area compresa tra il grafico di $f(x)$ e la retta.

QUESTIONARIO

I quesiti 1, 2, 3 e 6 corrispondono rispettivamente ai quesiti 1, 4, 2 e 7 del tema per il corso sperimentale, a cui si rinvia per le risoluzioni.

4. Dato un rettangolo di perimetro $2p$ in cui un lato sia posto uguale a x , si definisce la funzione $A(x) = x \left(\frac{2p-2x}{2} \right) = x(p-x) = px - x^2$. Considerando la derivata

$A'(x) = p - 2x$, si verifica facilmente l'esistenza di un massimo in $x = \frac{p}{2}$. Ne segue che anche l'altro lato è uguale a $p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$.

Si risolve il quesito senza ricorrere alle derivate osservando che $A(x)$ è rappresentata, in un sistema cartesiano opportuno, da una parabola con concavità rivolta verso il basso ed avente massimo in corrispondenza del vertice, per $x = \frac{p}{2}$.

5. Per la prima parte, si veda il quesito 5 del corso sperimentale. Per la seconda parte si ha: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$ grazie ad un limite notevole.

7. Si tratta di determinare i valori di k tali che $f(k) = k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 3 = 2$. La derivata prima è $f'(k) = 4k^3 - 12k^2 + 8k = 4k(k^2 - 3k + 2)$. La funzione risulta crescente

per $0 < k < 1$ e $k > 2$, decrescente per $k < 0$ e $1 < k < 2$. Si verifica l'esistenza di due minimi in $(0; 3)$ e $(2; 3)$, e di un massimo relativo in $(1; 4)$. Vista la continuità della funzione si deduce che non esistono valori di k che soddisfino la condizione posta. Più rapidamente, si poteva osservare che $f(k) = k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 3 = k^2(k-2)^2 + 3$, deducendo che $f(k)$ non è mai minore di 3.

8. L'ottaedro così costruito è regolare poiché tutti i lati sono uguali, di lunghezza pari ad $\frac{a}{\sqrt{2}}$ dove a è il lato del cubo, ogni faccia ha 3 lati e in ogni vertice concorre lo stesso numero di spigoli (4 spigoli). Il volume dell'ottaedro si calcola pensandolo come il doppio di una piramide avente per base la metà di una faccia del cubo e per altezza la metà dello spigolo del cubo. Si ha così $V_{\text{ottaedro}} = \frac{2}{3} \frac{a^2}{2} \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$ e quindi $\frac{V_{\text{ottaedro}}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{1}{6}$.

9. Poiché i due angoli considerati sono complementari, tenendo presente la relazione fondamentale della goniometria si può scrivere:
 $\text{sen}^2(90^\circ - 55^\circ) + \text{sen}^2(55^\circ) = \text{cos}^2(55^\circ) + \text{sen}^2(55^\circ) = 1$.

10. Si richiede il calcolo esplicito della derivata. Va posta la condizione che x sia diverso da -1 , per cui la funzione è definita a tratti per $x < -1$ e per $x > -1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(1+x^2)} = 0.$$

Pertanto, su ciascuna delle due semirette in cui è definita, la funzione assume un valore costante k ; possiamo determinare k considerando un qualsiasi valore di x , una volta con $x > -1$ e una volta con $x < -1$.

Per $x = 0$, si ha $f(0) = \frac{\pi}{4}$ nel caso $x > -1$. Nel caso $x < -1$, calcolando il limite di $f(x)$

per x che tende a -1 da sinistra si ottiene $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{4}\pi$. La funzione assume quindi il valore $-\frac{3}{4}\pi$ per $x < -1$.

In conclusione, in $x = -1$ esiste una discontinuità con un salto finito.

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

I due problemi appaiono ben proporzionati sia per quel che riguarda le conoscenze richieste che per la difficoltà nell'elaborazione e nello svolgimento dei calcoli. Nel problema 1 si insiste sul tema della determinazione di volumi ottenuti per rotazione, di aree, di rette tangenti. È richiesto qualche sforzo creativo, come nel caso della ricerca del volume di rotazione ottenuto ruotando la curva attorno all'asse y . Anche i punti 3 e 4 chiamano in causa, volendo, trasformazioni (traslazioni) e poi ancora il calcolo di

aree. Infine nei punti 4 e 5 viene proposto un problema di minimo, partendo da una funzione relativa ad un'area che funge da modello analitico per un problema geometrico.

Il problema 2 è forse un po' più sofisticato per quanto riguarda la specifica conoscenza di alcune nozioni di base dell'analisi matematica. È necessaria qualche riflessione sui concetti di continuità e di derivabilità, considerati nel caso specifico della funzione proposta. Il punto 2 richiede una strategia dimostrativa cui non sempre gli studenti sono abituati, con abilità nei calcoli che coinvolgono i concetti di approssimazione. I punti 4 e 5 richiedono specifiche conoscenze di strategie di integrazione, con calcoli un po' complicati. Nel punto 5 si propone un limite, con una verifica dell'effettiva comprensione dell'operazione di limite effettuata. Nel complesso, tuttavia, il problema è affrontabile senza eccessive difficoltà da parte di uno studente di liceo scientifico.

I quesiti sembrano elaborati con cura, espressione di un tentativo di esplorare con curiosità il livello medio di apprendimento di uno studente di liceo scientifico e la sua capacità di applicare, in situazione, le nozioni apprese. Il quesito 1 probabilmente intendeva proporre un recupero delle conoscenze del biennio lanciando un ponte verso la trigonometria. Il problema è noto, ma viene talora trascurato nei corsi ordinari. Vengono proposti quesiti che riprendono nozioni di geometria piana e solida (8, 4, 2), inserendoli in contesti diversi. Si va dal problema di minimo o massimo (2 e 4), al quesito con matematizzazione della realtà (2). I numeri 3, 5 e 10 interessano vari temi di analisi che coinvolgono nozioni ordinarie nel bagaglio che dovrebbe essere in possesso di ogni candidato. Qualche arguzia nel 10, assieme al fatto che era necessario riconoscere che la funzione era definita a tratti, rende simpatico il quesito. Tuttavia la sua formulazione è quantomeno imprecisa. La funzione $f(x)$ non è «costante» come viene esplicitamente ed impropriamente dichiarato nel quesito, bensì «definita a tratti». La formulazione presentata poteva indurre in errore i candidati impedendo loro di riconoscere il tipo di funzione.

Il quesito 9 rinfresca semplici nozioni di goniometria. Il quesito 7 esige qualche considerazione sulla funzione e sul suo grafico. Il 6 riprende un quesito di calcolo combinatorio e chiede di collegarlo ad altre situazioni in cui compare la funzione fattoriale, dandone un significato. È estremamente educativo, a mio avviso, chiedere senso e significato degli oggetti matematici con cui si lavora, chiedendo anche di evidenziarne l'importanza in un contesto. La richiesta, seppure assolutamente condivisa, si colloca tuttavia ad un livello *alto*. I quesiti sono generalmente formulati con chiarezza e non si prestano a fraintendimenti, se non nel caso del quesito 10. Consentono ad uno studente *medio* di svolgerne cinque senza eccessive difficoltà.

Giuseppe Zampieri

Liceo Scientifico «A. Cornaro» – 35127 Padova
beppezampieri@msn.com