

**ESAME DI STATO 2005,  
SECONDA PROVA SCRITTA  
PER I LICEI SCIENTIFICI  
A INDIRIZZO SPERIMENTALE  
(PNI E SCIENTIFICO-TECNOLOGICO  
"BROCCA")**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

**PROBLEMA 1**

Nel piano  $Oxy$  sono date le curve  $\lambda$  e  $r$  d'equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x-y) \quad \text{e} \quad r : 4y = x + 6.$$

1. Si provi che  $\lambda$  e  $r$  non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto  $P \in \lambda$  che ha distanza minima da  $r$ .
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da  $\lambda$  e dalla retta  $s$ , simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $x$ .
4. Si determini il valore di  $c$  per il quale la retta  $y = c$  divide a metà l'area della regione  $S$  del I quadrante compresa tra  $\lambda$  e l'asse  $x$ .
5. Si determini il volume del solido di base  $S$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse  $x$  sono quadrati.

**PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0; +\infty[$  da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $C$  la sua curva rappresentativa nel riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se  $f$  è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione  $f(x) = 0$  ha, sull'intervallo  $[0; +\infty[$ , un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni  $C$  e si determini l'equazione della retta  $r$  tangente a  $C$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .

4. Sia  $n$  un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di  $n$ , l'area  $A_n$  del dominio piano delimitato dalla curva  $C$ , dalla retta tangente  $r$  e dalle due rette:  $x = \frac{1}{n}$  e  $x = 1$ .
5. Si calcoli il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  e si interpreti il risultato ottenuto.

## QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\text{sen } 18^\circ$ ,  $\text{sen } 36^\circ$ .
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva  $y = x \text{ sen } x$  è tangente alla retta  $y = x$  quando  $\text{sen } x = 1$  ed è tangente alla retta  $y = -x$  quando  $\text{sen } x = -1$ .
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali  $\sigma$  e  $\varphi$  la cui composizione  $\sigma \circ \varphi$  dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso  $\varphi \circ \sigma$ .

4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta.)
5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero  $e$  di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
6. Le rette  $r$  e  $s$  di equazioni rispettive  $y = 1 + 2x$  e  $y = 2x - 4$  si corrispondono in una omotetia  $\sigma$  di centro l'origine  $O$ . Si determini  $\sigma$ .
7. Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = e^t + 2$  e  $y = e^t + 3$  nel suo punto di coordinate  $(3, 4)$ .
9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

*Durata massima della prova: 6 ore. È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.*

## RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Le curve  $\lambda$ ,  $r$  e  $s$  sono rappresentate nella figura 1.

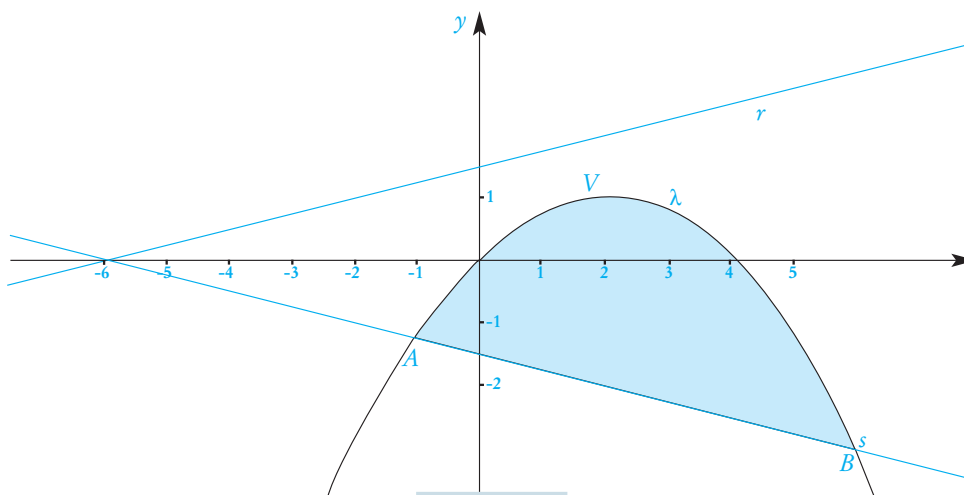


Figura 1

**1.** I grafici di  $\lambda$  e  $r$  evidenziano l'assenza di intersezioni reali. Dal punto di vista algebrico, l'equazione risolvente del sistema costituito dalle equazioni delle due curve, cioè  $x^2 - 3x + 6 = 0$ , avendo discriminante negativo, conferma l'assenza di punti reali comuni. Inoltre,  $x^2 - 3x + 6 > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

**2.** Detto  $P\left(t; -\frac{t^2}{4} + t\right)$  con  $t \in \mathbb{R}$ , il generico punto di  $\lambda$ , la sua distanza da  $r$  risulta

$$d(t) = \frac{|t^2 - 3t + 6|}{\sqrt{17}} = \frac{t^2 - 3t + 6}{\sqrt{17}} \quad (\text{vedi punto 1}).$$

Si conclude osservando che l'ascissa del punto di minima distanza è quella del vertice della parabola di equazione  $y = t^2 - 3t + 6$ , cioè  $t = \frac{3}{2}$ , oppure studiando  $d'(t)$ . Si ottiene  $P = \left(\frac{3}{2}; \frac{15}{16}\right)$ .

Alternativamente, consideriamo le rette parallele ad  $r$  che intersecano  $\lambda$ : esse hanno equazione  $y = \frac{1}{4}x + k$ , con  $k \leq \frac{9}{16}$ . Fra queste, la retta di minima distanza da  $r$  è la tangente alla parabola, cioè la retta di equazione  $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{16}$ . Il punto  $P$  cercato è il punto di tangenza; si ritrova facilmente che la sua ascissa è  $x = \frac{3}{2}$ .

**3.** La retta  $s$  simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $x$ , ha equazione  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$  e interseca  $\lambda$  in  $A\left(-1; -\frac{5}{4}\right)$  e  $B(6; -3)$ . L'area richiesta è perciò

$$\text{data da } \int_{-1}^6 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x - \left( -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \right) \right) dx = \frac{343}{24}.$$

Alternativamente, si poteva determinare il punto  $H$  di  $\lambda$  in cui la tangente è parallela ad  $AB$ : imponendo che la derivata della funzione  $y = -\frac{x^2}{4} + x$  sia  $-\frac{1}{4}$ , si trova  $x = \frac{5}{2}$  e, di conseguenza,  $y = \frac{15}{16}$ . Per il noto teorema di Archimede, l'area del segmento parabolico è uguale ai  $\frac{4}{3}$  dell'area del triangolo  $ABH$ .

4. La retta  $y = c$  interseca  $\lambda$  come indicato nel testo ministeriale per  $0 < c < 1$ . Le sue intersezioni con  $\lambda$  hanno ascisse  $x_1, x_2 = 2 \pm 2\sqrt{1-c}$ . Per determinare il valore di  $c$ , proponiamo tre soluzioni.

*Prima soluzione.*  $\text{Area}(S) = 2 \int_0^2 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x \right) dx = \frac{8}{3}$ . Risolvendo con calcoli un po'

laboriosi l'equazione  $2 \int_{2-2\sqrt{1-c}}^2 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x - c \right) dx = \frac{4}{3}$ , si ricava  $c = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ .

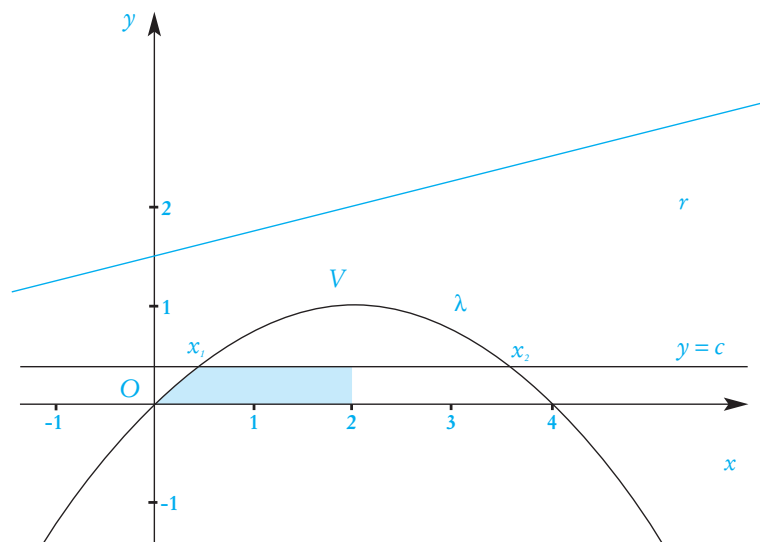


Figura 2

*Seconda soluzione.* L'arco di parabola  $OV$  (vedi figura 2), pensando  $x$  come funzione di  $y$ , ha equazione  $x = 2 - 2\sqrt{1-y}$ , con  $0 \leq y \leq 1$ . Sottraendo dall'area del rettangolo di lati  $c$  e  $2$  quella del trapezoide relativo all'arco

OV con  $0 \leq y \leq c$  e sfruttando la simmetria della parabola, si perviene all'equazione  $2c - \int_0^c (2 - 2\sqrt{1-y}) dy = \frac{2}{3}$  nell'incognita  $c$ . Il precedente valore di  $c$  si ottiene rapidamente.

*Terza soluzione.* Grazie al teorema di Archimede prima richiamato si ha  $Area(S) = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{8}{3}$  e si tratta quindi di trovare il valore di  $c$  che soddisfa l'equazione  $\frac{2}{3}(x_2 - x_1)(1 - c) = \frac{4}{3}$ , ove i valori di  $x_1$  e  $x_2$  sono quelli calcolati precedentemente. Facilmente si riottiene  $c = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ .

5. Il volume proposto (figura 3) si calcola attraverso l'integrale delle aree delle sezioni parallele del solido ottenute con piani ortogonali all'asse  $x$ , ossia:

$$V = 2 \int_0^2 \left( -\frac{1}{4}x^2 + x \right)^2 dx = \frac{32}{15}.$$

Tale metodo delle sezioni parallele talvolta viene ricordato ricorrendo a paragoni scherzosi, come per esempio: «è il metodo per calcolare il volume di un salame conoscendo l'area di tutte le fette ottenute affettandolo» (G. Barozzi, *Corso di analisi matematica*, Zanichelli). Esso, anche se non sempre citato nei libri di testo, si presta per il suo carattere intuitivo ad essere presentato agli studenti come importante esemplificazione del significato di integrale definito. Inoltre, potrebbe essere posto alla base dell'applicazione del calcolo integrale alla geometria solida per dedurre il principio di Cavalieri e la formula relativa al volume di un solido di rotazione.

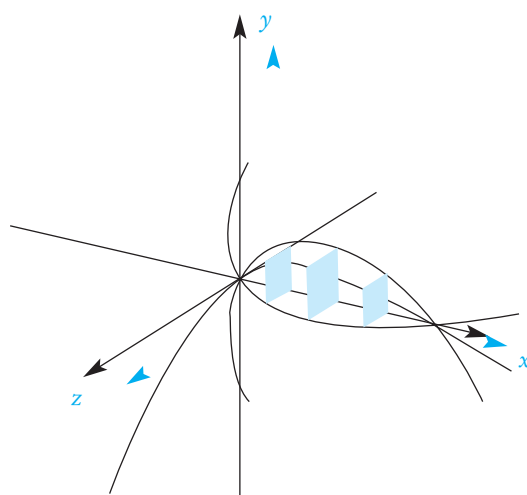


Figura 3

## RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Si rinvia alla risoluzione della prova per il Liceo Scientifico di ordinamento.

## RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. Dalla similitudine dei triangoli isosceli  $ABO$  e  $CAB$  (figure 4 e 5), segue facilmente la proporzione  $r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10})$ , che fornisce l'espressione  $l_{10} = r \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , ove  $r$  è il raggio della circonferenza circoscritta al decagono regolare:  $l_{10}$  è pertanto la sezione aurea di  $r$ .

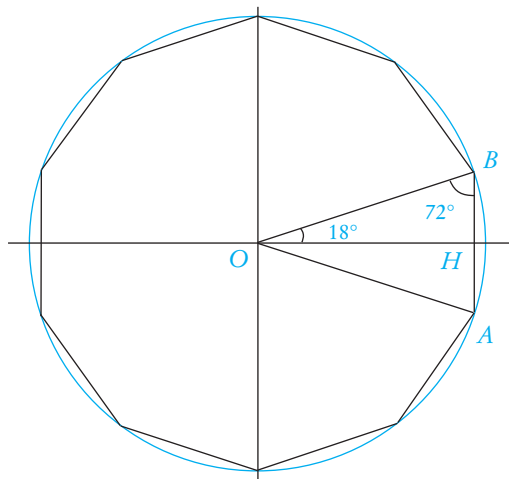


Figura 4

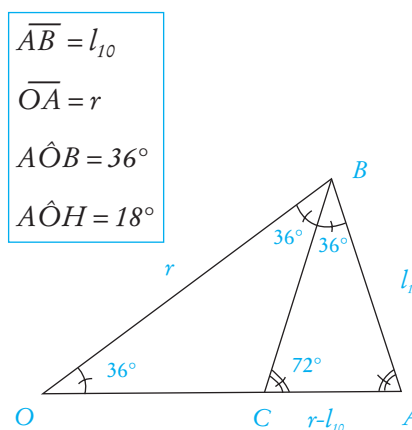


Figura 5

In base alla definizione di seno di un angolo, si ha:  $\text{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  e quindi  $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ . Usando la formula di duplicazione del seno oppure

applicando il teorema del coseno al triangolo  $AOB$  si ottiene  $\text{sen} 36^\circ = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ .

2. È pensabile che ci si riferisca alla curva grafico di una funzione derivabile  $f(x)$ . Allora la tangente al grafico nel punto di ascissa  $x_0$  è la retta  $t$  di equazione  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ . L'articolo «una» lascia aperta la possibilità di definizioni quali: la retta  $t$  è tangente ad una curva in un suo punto  $P$ , se in  $P$  possiede almeno due intersezioni coincidenti con la curva, oppure se occupa la posizione limite delle secanti  $PP'$  quando  $P'$  tende a  $P$  lungo la curva (a rigore, tuttavia, in queste ultime definizioni si dovrebbe precisare che cosa si intende per «intersezioni coincidenti» e per «posizione limite»).

Indicate con  $g$  ed  $r$  le curve di equazione  $y = x \operatorname{sen} x$  ed  $y = x$ , sia  $x_0$  un valore tale che  $\operatorname{sen} x_0 = 1$ . Allora sia  $g$  che  $r$  passano per il punto  $(x_0; x_0)$ . Essendo  $D(x \operatorname{sen} x)|_{x=x_0} = 1$ , la retta tangente a  $g$  in  $(x_0; x_0)$  ha pendenza 1 e quindi coincide con  $r$ . Analogamente per la seconda parte del quesito.

3. La risoluzione si basa su un noto teorema di geometria delle trasformazioni generalmente affrontato nel biennio. Considerate ad esempio le due rette  $a$  e  $b$ , di equazioni  $y = x$  ed  $y = x - \sqrt{5}$  (figura 6), le equazioni delle simmetrie richieste

risultano  $\varphi: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$  e  $\sigma: \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases}$ ; la loro composizione  $\sigma \circ \varphi$  dà luogo alla

traslazione di vettore  $\vec{v} = (\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ . In generale, si possono scegliere due qualunque rette parallele alla retta  $a$  e con una distanza fra loro pari a  $\frac{\vec{v}}{2}$ .

La trasformazione  $\varphi \circ \sigma$  coincide con la traslazione di vettore  $-\vec{v}$ , e quindi basta scambiare fra loro i segni «+» e «-» nelle equazioni date nel testo.

La risoluzione del quesito si semplifica scegliendo come nuovo sistema di riferimento la terna  $\{O, X', Y'\}$  equiorientata con quella iniziale, ove l'asse  $X'$  è concorde con  $\vec{v}$  e l'asse  $Y'$  è perpendicolare a  $X'$  in  $O$ .

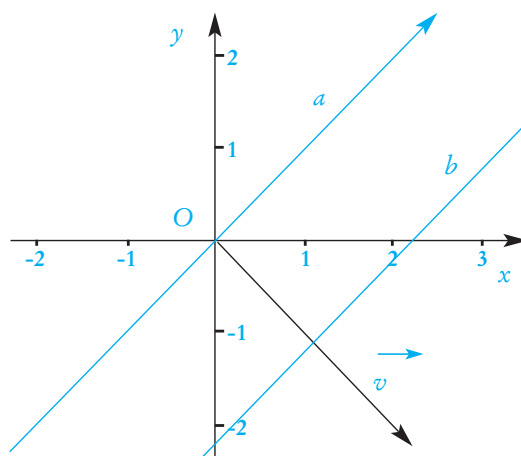


Figura 6

4. Indicati con  $V$ ,  $r$  ed  $h$  il volume, il raggio e l'altezza del cilindro, da  $V = \pi r^2 h$  si ricava il valore di  $h$ , ottenendo poi  $S_{TOT} = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ . Per minimizzare la funzione o si segue il metodo standard (segno di  $S'(r)$  e studio del comportamento di  $S(r)$  agli estremi del dominio), oppure si può procedere per via elementare.

Infatti, posto  $x_1 = 2\pi r^2$  ed  $x_2 = \frac{2V}{r}$ , il prodotto  $x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2$  è costante. Quindi,  $x_1 + x_2$

è minimo se e solo se  $\frac{x_1}{\frac{1}{2}} = x_2$ , cioè se e solo se  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ . Di conseguenza  $h = 2r$ :

si tratta di un cilindro equilatero. Sostituendo i dati numerici, si trova:  $r \cong 3.99\text{cm}$  ed  $h \cong 7.98\text{cm}$ .

5. Usualmente il numero  $e$  si definisce come il limite della successione  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,

con  $n \geq 1$ , crescente e limitata tra 2 e 3. Esso ha un valore approssimato di 2,7182818... Se si affrontano le serie, si può provare che  $e$  risulta somma della serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ . Tale numero è non solo irrazionale (Eulero, 1737), ma anche trascendente (Hermite, 1874). L'uso della lettera  $e$  per indicare tale limite (proposto da Jacob Bernoulli) fu di Eulero, il quale ne costruì lo sviluppo come frazione continua. Napier nelle sue opere usa per la prima volta il termine logaritmo ed espone i principi della sua «regola meravigliosa» in termini geometrici, essendogli estraneo qualunque sistema di logaritmi. Gli si riconosce comunque di aver introdotto per primo i logaritmi in base  $\frac{1}{e}$ .

L'importanza di  $e$  sta in vari fatti: è la base dei logaritmi naturali, che godono delle note proprietà in Analisi matematica (come  $D(\ln x) = \frac{1}{x}$ ); si presenta in problemi in cui una grandezza aumenta o diminuisce con velocità proporzionale alla grandezza ad ogni istante; lo si ritrova in due importanti variabili aleatorie, quelle di Poisson e di Gauss.

Per calcolare il valore di  $e$  con un errore inferiore ad  $E$ , indichiamo tre possibilità:

- a) da  $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ , si ha  $\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{n!n}$ ;
- b) usando la formula di Maclaurin con resto di Lagrange si ottiene  $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\xi}{n!}$ , con  $0 < \xi < 1$ , ove  $\left| \frac{e^\xi}{n!} \right| < \frac{3}{n!}$ ;
- c) si osserva che le due successioni  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  e  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  convergono entrambe ad  $e$ , la prima crescendo e la seconda decrescendo, e che si ha  $|b_n - a_n| \leq \frac{4}{n}$ .

È sufficiente allora risolvere la disequazione  $\frac{1}{n!n} < E$  in a) e le analoghe in b) e in c).

6. Applicando l'omotetia  $\omega_{O,k}$  di equazioni  $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$  ad una delle due rette ed imponendo che l'immagine sia l'altra retta, si ottiene  $k = -4$  (ovvero  $k = -\frac{1}{4}$ ).

Oppure, una volta osservato che le due rette sono parallele (altrimenti il problema non ammetterebbe soluzione), basta imporre che l'immagine di un singolo punto di una delle due rette appartenga all'altra.

7. Definiamo  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ , con  $n \geq 1$ , e  $0! = 1$ ; oppure, induttivamente,  $0! = 1$  ed  $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ . Esso rappresenta il numero delle permutazioni di  $n$  oggetti.

$C_{n,k} = \binom{n}{k}$ , con  $0 \leq k \leq n$ , indichi il numero delle combinazioni semplici di classe  $k$  di  $n$  oggetti; due di queste sono distinte se e solo se differiscono per almeno un

oggetto. Perciò  $\binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ , rapporto tra il numero

delle disposizioni semplici di classe  $k$  di  $n$  oggetti e il numero delle permutazioni di  $k$  oggetti. Infine, moltiplicando numeratore e denominatore per  $(n-k)!$ , si ha

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

8. Ricavato  $e^t$  dalla prima equazione e sostituito nella seconda, si ottiene  $y = \frac{1}{x-2} + 3$  con  $x > 2$ , equazione cartesiana della curva, e poi  $y = -x + 7$ , equazione cartesiana della sua retta tangente nel punto  $(3; 4)$ . Oppure, si osserva che il valore del parametro cui corrisponde il punto  $(3; 4)$  è  $t_0 = 0$ ; siccome il vettore tangente alla curva è  $\vec{u} = (x'(t_0); y'(t_0))$ , per  $t_0 = 0$  si ha  $\vec{u} = (1; -1)$  e quindi, la retta

$$\text{tangente ha equazioni parametriche } \begin{cases} x(t) = 3+t \\ y(t) = 4-t \end{cases}$$

9. La prima probabilità che si deve valutare è  $p = \frac{1}{12}$  (ci sono 3 casi favorevoli su 36). Alle altre richieste si risponde costruendo la variabile aleatoria bernoulliana

$B_{n,p}(n=6, p=1/12, q=1-p)$ . Si devono valutare  $P(B_{6,p} = 2)$  e  $P(B_{6,p} \geq 2)$ .

$$\text{Si ha: } P(B_{6,p} = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4 \approx 7.35\%$$

$$\text{e } P(B_{6,p} \geq 2) = P(\overline{B_{6,p} \leq 1}) = 1 - P(B_{6,p} = 0) - P(B_{6,p} = 1) \approx 8.3\%.$$

- 10.** Siano  $x$  ed  $y$  le medie della popolazione rispettivamente con 60 anni o più e con meno di 60 anni. Se 30 è la media ponderata di  $x$  (con peso 0.4) e di  $y$  (con peso 0.6), si ha  $0.4x + 0.6y = 30$ , cioè  $y = -\frac{2x}{3} + 50$  con i vincoli  $x \geq 60$  e  $y \geq 0$ . Le soluzioni accettabili sono  $\{(x; y) : 60 \leq x \leq 75; 0 \leq y \leq 10\}$ , cioè i punti del segmento  $AB$  in figura 7. Una soluzione è ad esempio la coppia  $x = 60, y = 10$ . In generale, il 40% della popolazione deve avere un'età media compresa tra i 60 e i 75 anni, mentre il 60% tra 0 e 10 anni, situazione possibile, anche se molto rara nella realtà.

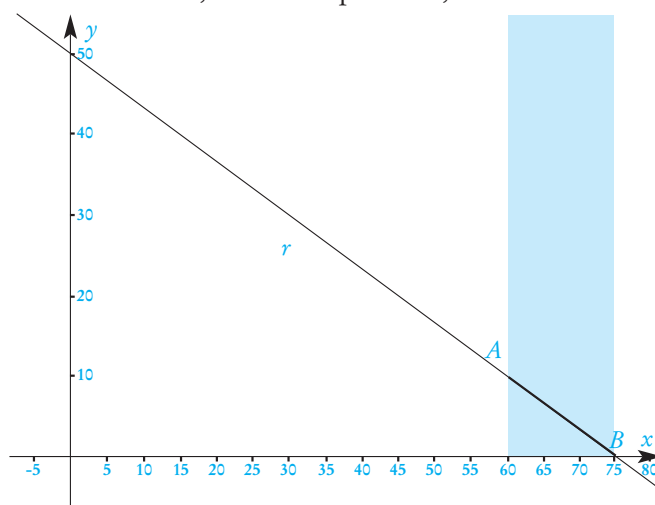


Figura 7

### CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Le richieste del problema 1 non risultano complesse né di difficile interpretazione da parte di studenti ragionevolmente preparati, tranne forse quella relativa al punto 5. Inoltre, è positivamente confermata la suddivisione del problema in punti tra loro indipendenti e di difficoltà via via crescente. Tuttavia, riguardo alle competenze richieste, il problema appare sbilanciato sull'applicazione del calcolo integrale (tre punti su cinque); comunque, nei punti 2 e 4 si offre allo studente capace la possibilità di scegliere, tra diversi procedimenti risolutivi, uno meno ovvio ma più conveniente dal punto di vista del calcolo; infine, nel punto 5, si mette in evidenza lo studente che ha ben acquisito il concetto di integrale definito. È la terza volta in pochi anni che vengono proposte questioni legate al calcolo del volume di un solido attraverso l'integrale delle aree delle sue sezioni parallele. Nell'affrontarle gli studenti si trovano sempre in difficoltà: o sono troppo legati al caso del solido di rotazione, o non riescono a visualizzare la figura, o non hanno pienamente compreso tale metodo di calcolo. Infine, nel punto 1 del testo sarebbe stato a rigore opportuno specificare punti reali, in quanto le due curve si intersecano in due punti a coordinate complesse.

Dei dieci quesiti proposti, cinque sono comuni con quelli del Liceo di ordinamento, salvo lievi variazioni nel secondo e nel quinto. Questo fatto sembra confermare la

tendenza da parte del Ministero a proporre un tema di matematica simile nei due corsi liceali: forse ciò esprime l'orientamento ad unificare i curricula di matematica. Gli argomenti proposti sono abbastanza vari, non particolarmente impegnativi e tali da permettere un'adeguata verifica non solo delle conoscenze degli studenti, ma anche della loro capacità di applicarle secondo modalità più o meno originali. A differenza degli anni scorsi, presentano livelli simili di difficoltà, tranne i numeri 7 e 1. Tuttavia, si insiste troppo sulla determinazione della retta tangente (anche nel secondo problema) a scapito della geometria, dell'algebra vettoriale e delle matrici, dell'analisi numerica. Infatti, la geometria è presente solo nel primo quesito e nella dimostrazione di un teorema relativo al programma del biennio; l'algebra vettoriale e delle matrici è assente; l'analisi numerica compare in maniera marginale nella richiesta finale del quesito 5. Abbiamo qualche dubbio sul secondo quesito: si chiede infatti di dare «una definizione di retta tangente ad una curva». È improbabile che le conoscenze degli studenti comprendano la nozione di retta tangente ad una generica curva piana. Sarebbe stato interessante una richiesta esplicita delle «differenze» tra le definizioni di tangente al grafico di una funzione derivabile e di tangente ad una conica. La richiesta di analisi numerica nel quinto quesito, meno scontata delle usuali domande in proposito, ci sembra di maggiore difficoltà: infatti, le serie e gli sviluppi di Taylor con resto di Lagrange non sempre vengono svolti nel corso dell'ultimo anno. Il quarto quesito ripropone, con lievi variazioni sulle unità di misura, i primi due punti del problema 2 della sessione suppletiva 2000/01 per i corsi sperimentali. Alcuni commentatori, con i quali concordiamo, hanno giudicato positivamente questo uso della matematica in problemi quotidiani e auspicato un «ritorno alla realtà», per verificare la capacità di applicazione degli strumenti matematici in contesti diversi. Il quesito 3, a differenza del quesito 1, è interessante anche perché consente ad un allievo intuitivo o riflessivo di rispondere pur non ricordando il teorema relativo alla richiesta. Semplice ma non del tutto banale il quesito 7 simile a quello proposto nella sessione straordinaria 2001/02: infatti, non ci si limita a richiedere definizioni e formule, ma si invita a esplicitarne il significato e i collegamenti. Di rilievo l'ultimo quesito, che consente allo studente di fare considerazioni sui limiti delle risposte che spesso i modelli matematici forniscono.

Per quanto riguarda le problematiche relative alla valutazione dei quesiti, si rimanda alle osservazioni discusse in «Archimede» n. 4 del 2003, pagg. 209 e 210, e in «Archimede» n. 4 del 2004, pagg. 196 e 197. Infine, notiamo in vari quesiti un interesse per la Storia della matematica che riteniamo positivo. Infatti, presentare alcuni argomenti del programma nel loro sviluppo storico è didatticamente valido e può favorire un approccio meno timoroso da parte degli studenti verso la disciplina. D'altra parte, come disse Poincaré, «il vero metodo per prevedere l'avvenire delle matematiche è studiarne la storia e lo stato attuale».

**Federico Pilla**  
**Tiberio Luigi Giacomo Bottacin**

Istituto Magistrale Statale «D.G. Fogazzaro» – Vicenza  
istituto@fogazzaro.it / www.fogazzaro.it