ESAME DI STATO 2010 SECONDA PROVA SCRITTA PER IL LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R\,(0, 1)$? E nel punto $S\,(1, 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$.

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e (e = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli: $\lim\limits_{x\to\infty} 4x \sin\dfrac{1}{x}$.
5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.
7. Per quale o quali valori di k la funzione $h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \le 4 \\ kx^2 - 2x - 1 & x > 4 \end{cases}$ è continua in $x = 4$?
8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1. Ricordando che due circonferenze tangenti esternamente hanno i centri allineati con il punto di tangenza, detto T quest'ultimo, si ha $\overline{PT} = \overline{AP} = x$, $\overline{PB} = 1 - x$, con $0 \le x \le 1$ (fig. 1). Analogamente, indicato con y il raggio della circonferen-

za λ, si ha $\overline{CQ} = \overline{QT} = y$, $\overline{BQ} = 1 - y$, con $0 \le y \le 1$. Ricaviamo y in funzione di x applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PBQ. Si ha: $\overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2$ da cui $(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$ e infine $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

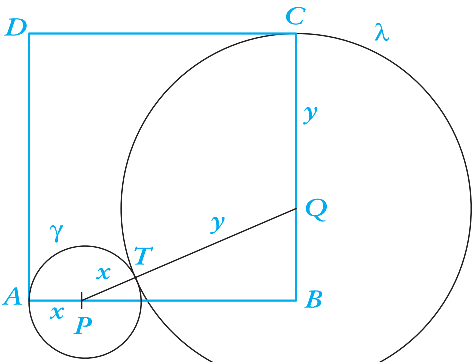


Figura 1

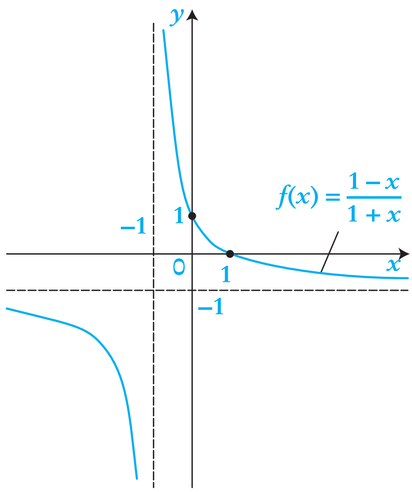


Figura 2

Osserviamo che una costruzione con riga e compasso della circonferenza λ è possibile ma non immediata. Comunque, l'esistenza di una (e una sola) circonferenza nelle condizioni descritte si dimostra rapidamente con considerazioni di continuità (si parte da una circonferenza di raggio «piccolo» e lo si ingrandisce fino a che risulti tangente a γ); del resto, i calcoli precedenti costituiscono una dimostrazione algebrica dell'esistenza di λ.

2. La funzione $f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \to R$ definita da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ ha per grafico un'iperbole (fig. 2) di centro $(-1, -1)$ e avente per asintoti le rette $x = -1$ ed $y = -1$. Si parla talvolta, in questi casi, di funzione omografica perché f induce una proiettività da una retta proiettiva in sé.
Come risulta chiaro dal grafico, l'immagine della funzione è $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Dunque è possibile considerare $f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \to (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ in modo da rendere la funzione suriettiva. Poiché la derivata $f'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$ è sempre negativa, si potrebbe essere tentati di concludere che la funzione è strettamente decrescente e quindi iniettiva. Tale ragionamento, tuttavia, si basa su un teorema che richiede tra le ipotesi che la funzione sia definita su un intervallo, cosa che nel nostro caso non avviene. Conviene allora usare direttamente la definizione di funzione iniettiva.

Infatti: $\forall\, x_1, x_2 \in (-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$ da $f(x_1) = f(x_2)$ ovvero $\dfrac{1-x_1}{1+x_1} = \dfrac{1-x_2}{1+x_2}$ segue $(1-x_1)(1+x_2) = (1-x_2)(1+x_1)$; svolgendo i calcoli si ottiene $x_1 = x_2$ e dunque la funzione è iniettiva. Essendo sia iniettiva che suriettiva, la funzione risulta biunivoca e di conseguenza invertibile. Semplici calcoli mostrano che $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, con $f^{-1}: (-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty) \to (-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$.

Poiché la funzione $f(x)$ coincide con la funzione $f^{-1}(x)$, coincidono anche i loro grafici.

Alternativamente, si poteva notare che la relazione fra le variabili x ed y è *simmetrica* per motivi geometrici, come del resto è confermato per via algebrica dall'equazione prima ottenuta $(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$. Quindi, se ad un valore di x (diverso da -1) corrisponde un certo valore di y, allora a quest'ultimo valore corrisponde il valore iniziale.

3. Poiché $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} & \text{se } -1 < x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{1+x} & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1 \end{cases}$ in un intorno del punto $R(0, 1)$ si ha $g(x) = f(x)$ dunque $g'(0) = f'(0) = -2$. Quindi l'equazione della retta tangente è $y - 1 = -2(x-0)$ ovvero $y = -2x + 1$.

Nel punto $S(1, 0)$, invece, la funzione g non è derivabile. Infatti facendo il limite del rapporto incrementale destro e sinistro per x che tende a 1, si ottiene: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \dfrac{1}{2}$ che è diverso da $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\dfrac{1}{2}$. Pertanto in S la funzione presenta un punto angoloso.

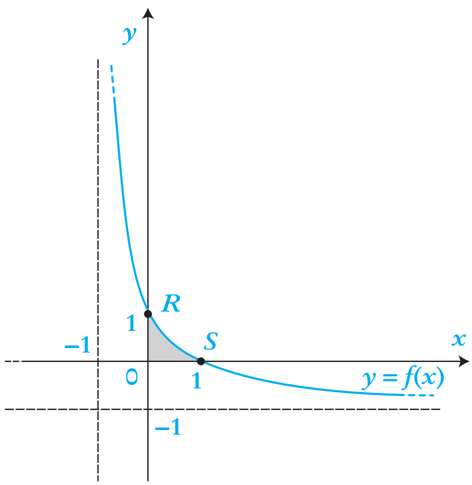


Figura 3

4. L'area richiesta, illustrata in fig. 3, corrisponde a $\int_0^1 f(x)dx$, ovvero

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)dx = \left[-x\right]_0^1 + 2\left[\ln\ |1+x|\right]_0^1 = -1+2\ln(2) = \ln\frac{4}{e}.$$

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

1. I grafici richiesti sono quelli usuali delle funzioni esponenziali: l'andamento cambia a seconda della base (si vedano la fig. 4 per $b>1$ e la fig. 5 per $0<b<1$).

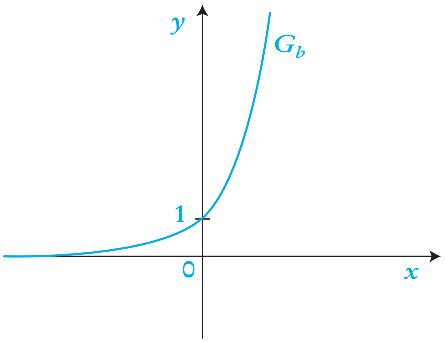


Figura **4**

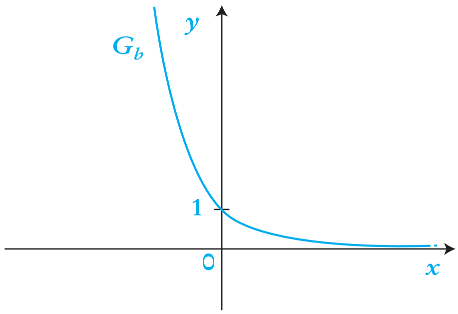


Figura **5**

2. Sia $P(a, b^a)$ un generico punto di G_b; tenendo conto che $f'(x)=\ln(b)\ b^x$, si trova che la retta tangente in P ha equazione $y-b^a=\ln(b)b^a\left(x-a\right)$. La retta per P parallela all'asse y ha equazione $x=a$; evidentemente $B(a, 0)$ (fig. 6).
Per determinare le coordinate del punto A basta risolvere il sistema $\begin{cases} y=0 \\ y=\ln(b)b^a\left(x-a\right)+b^a \end{cases}$ ottenendo $A\left(a-\frac{1}{\ln(b)},\ 0\right)$. Dunque la misura del segmento AB è $\left|a-\left(a-\frac{1}{\ln(b)}\right)\right|=\left|\frac{1}{\ln(b)}\right|$. Tale misura, non dipendendo da a, non dipende dalla scelta del punto P.
Per concludere, osserviamo che $\overline{AB}=1$ se e solo se $\left|\frac{1}{\ln(b)}\right|=1$, ovvero se $b=e$ oppure $b=\frac{1}{e}$.

3. Poniamo come richiesto $b=e$. In tal caso, l'equazione della retta tangente calcolata al punto precedente diviene $y-e^a=e^a\left(x-a\right)$. Imponendo il passaggio per l'origine, si ottiene $a=1$, per cui la retta richiesta ha equazione $y=ex$. Ricordando che il coefficiente angolare di una retta coincide con la tangente trigonometrica che la stessa forma con il semiasse positivo delle ascisse, si ha, indicato con θ l'angolo richiesto, $\tan(\theta)=e$, ovvero $\theta=\arctan(e)$.

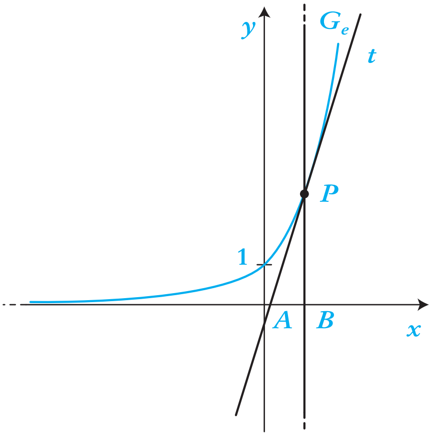


Figura 6

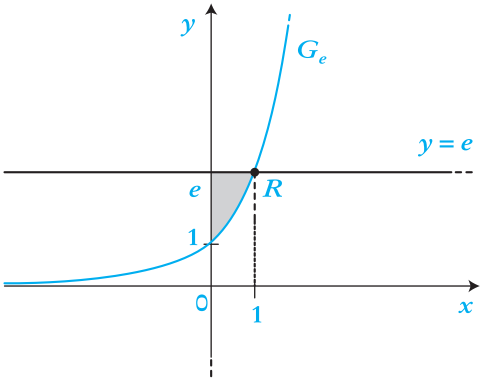


Figura 7

4. Per calcolare l'area richiesta, determiniamo dapprima le coordinate del punto R di intersezione tra G_e e la retta di equazione $y = e$ (fig. 7). Risulta $R(1, e)$.

L'area è data da $\int_0^1 \left(e - e^x\right) dx = \left[ex - e^x\right]_0^1 = (e - e) + 1 = 1.$

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. Si veda la soluzione del quesito 1 nel tema PNI.

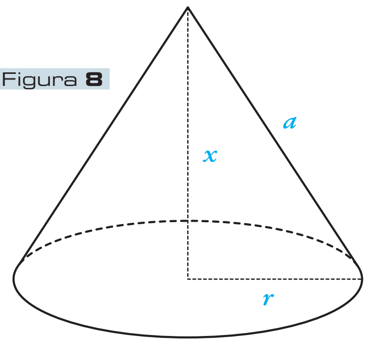
2. Si veda la soluzione del quesito 2 nel tema PNI.

3. La funzione data è ovunque derivabile. Ne segue che la pendenza della retta tangente nel punto di ascissa x_0 coincide con $f'(x_0) = 3e^{3x_0}$. Pertanto si ha $3e^{3x_0} = 2$, da cui $x_0 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

4. Ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, operiamo il cambiamento di variabile $t = \frac{1}{x}$. Si ha: $\lim_{x\to\infty} 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 4\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 4.$

5. Dato un cono circolare retto (fig. 8), siano x l'altezza, r il raggio di base e a (lungo 80 cm = = 8 dm) l'apotema. Abbiamo trasformato i centimetri in decimetri poiché le capacità nel SI sono misurate in dm^3 (o equivalentemente, come richiesto dal testo, in litri); omettendo nel corso dei calcoli l'unità di misura, troviamo $r = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{64 - x^2}$.

Figura 8



Dalla formula $V=\frac{1}{3}\pi r^2 x$ che fornisce il volume del cono, si ottiene la funzione $V(x)=\frac{1}{3}\pi\left(64-x^2\right)x$ con $0\le x\le 8$ (nei casi $x=0$ e $x=8$ il cono degenera rispettivamente in un cerchio o in un segmento). Poiché la funzione è polinomiale, essa è continua. Essendo il suo dominio chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass essa ammette massimo e minimo. Inoltre la funzione è derivabile ovunque e, quindi, i punti di massimo e di minimo vanno ricercati tra i punti stazionari interni e gli estremi del dominio. Per i punti stazionari, essendo $V'(x)=\frac{1}{3}\pi(64-3x^2)$, si ha $V'(x)=0$ solo per $x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Poiché $V\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1024\sqrt{3}\pi}{27}$ e $V(0) = V(8)=0$, si conclude che la capacità massima richiesta è $\frac{1024\sqrt{3}\pi}{27}\,\mathrm{dm}^3$.

6. Imponendo la condizione $\cos(x)\ge 0$, si trova che il dominio richiesto è $\bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$.

7. Per definizione, la funzione data risulta continua nel punto $x = 4$ se si ha $h(4)=\lim_{x\to 4} h(x)$. Ora $h(4) = 0$; essendo $\lim_{x\to 4^+}(kx^2-2x-1)=16k-9$ ed ovviamente $\lim_{x\to 4^-}(3x^2-11x-4)=0$, si ha che il limite $\lim_{x\to 4} h(x)$ esiste ed è uguale a zero se e solo se $16k-9=0$, ovvero per $k=\frac{9}{16}$.

8. Una successione numerica si dice *progressione aritmetica* se, a partire dal secondo termine della successione, la differenza fra ogni termine e il precedente è costante. Pertanto si deve avere $\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}$ con $n>3$, ovvero $2\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n-3}=0$. Tenendo presente l'uguaglianza $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$, possiamo scrivere l'equazione precedente come $2\binom{n}{2}-\binom{n}{1}-\binom{n}{3}=0$. Sviluppando i calcoli si perviene a $-n(n^2-9n+14)=0$; quest'ultima equazione ammette le soluzioni 0, 2, 7. Poiché n è un numero naturale maggiore di 3, l'unica soluzione accettabile risulta $n=7$.

9. Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC (fig. 9), per $\beta = 45°$ si ha: $\frac{3}{\sin(\gamma)}=\frac{2}{\sqrt{2}/2}$, da cui $\sin(\gamma)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Ma, essendo $\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$, un tale triangolo non può esistere.

Ripetendo i calcoli analoghi con $\beta = 30°$, si ottiene $\frac{3}{\sin(\gamma)} = \frac{2}{1/2}$ da cui $\sin(\gamma) = \frac{3}{4}$; poiché $\frac{3}{4} < 1$, esistono due angoli (uno acuto e l'altro ottuso) la cui somma con β è minore di 180°; quindi i triangoli che soddisfano la condizione posta sono due.

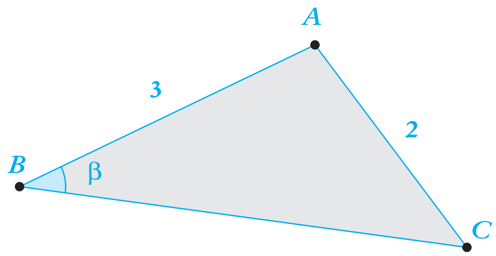


Figura 9

Si può dare risposta al quesito anche per via geometrica. Si tracci l'altezza AH relativa a BC. Nel primo caso l'impossibilità risulta dal fatto che si avrebbe

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} > 2 = \overline{AC},$$ cosa palesemente impossibile visto che un cateto di un triangolo rettangolo deve essere minore dell'ipotenusa. Nel secondo caso invece, ripetendo i calcoli, si ha $\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{3}{2} < 2 = \overline{AC}$, che è compatibile con la situazione geometrica. In tal caso, esistono due punti C e C' simmetrici rispetto ad H che soddisfano la richiesta (si tratta delle intersezioni della circonferenza di centro A e raggio 2 con la retta BH).

10. Il solido richiesto (fig. 10) è la differenza tra un cilindro, avente raggio di base 4 e altezza 2, e il solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse y il grafico di $y = \sqrt{x}$ con $0 \leq x \leq 4$, ovvero il grafico di $x = y^2$ con $0 \leq y \leq 2$.

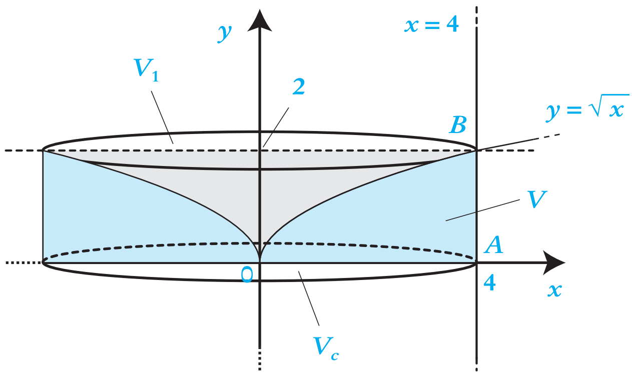


Figura 10

Svolgendo i calcoli per i volumi, si trova

$$V = V_C - V_1 = \pi \cdot 16 \cdot 2 - \pi \int_0^2 y^4 \, dy = 32\pi - \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi .$$

Per un metodo risolutivo diverso si veda la soluzione del quesito 10 del tema PNI, che riguarda lo stesso solido.

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Il tema proposto quest'anno per il Liceo Scientifico di ordinamento non era particolarmente complesso e di certo era alla portata degli studenti preparati. Vediamo alcune osservazioni entrando nello specifico.

- Nel problema 1 il punto 2 ha ingannato perfino alcuni risolutori delle prove nel dimostrare che la funzione è iniettiva. Difatti, il grafico della funzione induce (erroneamente!) a pensare che si tratti di una funzione strettamente decrescente e quindi ad applicare una delle conseguenze del Teorema di Lagrange.
- Nel problema 1 il punto 3 ci pare mal formulato. La richiesta di quale sia la retta tangente nel punto S precede la domanda successiva, che induce a riflettere sulla non derivabilità della funzione in tale punto.
- Nel problema 1 il punto 4 prevede il calcolo dell'area di un triangolo mistilineo individuato dal grafico di f: non è chiara la necessità (e nemmeno l'opportunità) di far eventualmente riferimento al grafico di g che, peraltro, non è richiesto in alcuno dei punti precedenti.
- Nel problema 2 il punto 1 ci pare sostanzialmente nozionistico, visto che si chiede solo di discutere come varia il grafico di una funzione esponenziale al variare della base. Forse si è persa l'occasione per vedere quanti studenti hanno riflettuto sulle ragioni di opportunità che suggeriscono di escludere il caso della base uguale a 1 (ad esempio per garantire l'invertibilità).
- Nel quesito 4 si parla di limite per $x \to \infty$. Ora, nelle nostre scuole l'introduzione del simbolo ∞ risulta meno diffusa dell'introduzione dei due simboli $-\infty$ e $+\infty$. Non si tratta di una semplice questione di gusti (o peggio di due cose equivalenti, come spesso pensano molti studenti).
  Difatti in $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, oltre alla struttura algebrica, si perde anche la struttura di ordine, mentre quest'ultima viene preservata in $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ciò comporta differenze sul piano topologico e, quindi, sulla definizione di limite e sul relativo calcolo.
- Il quesito 6 ci appare più elementare degli altri e di calcolo pressoché immediato.
- Il quesito 8, al pari di numerosi altri quesiti di calcolo combinatorio proposti negli anni scorsi, richiede semplicemente la conoscenza delle formule e non il significato dei coefficienti binomiali.

- Il quesito 9 ci pare interessante poiché può essere risolto sia in termini geometrici elementari sia in termini trigonometrici. A nostro avviso si tratta di un quesito non banale per gli studenti, visto che viene formulato in termini di impossibilità.

Al di là di queste osservazioni specifiche, vogliamo cogliere ancora una volta l'occasione per ribadire l'auspicio di un'esplicita indicazione dei punteggi per ogni singola parte della prova, nonché di una proposta di griglia di correzione, al fine di rendere più oggettiva la valutazione degli studenti.

Roberto Porcaro
Liceo Artistico «V. Cardarelli», La Spezia
profrporcaro@gmail.com