

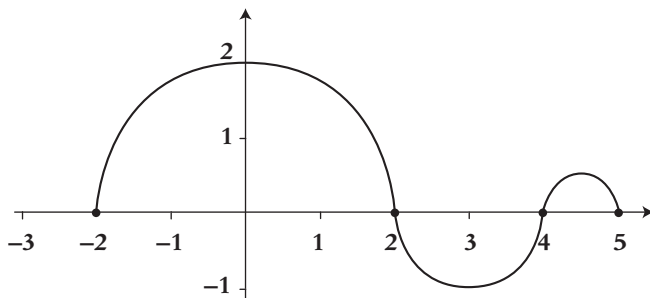
ESAME DI STATO 2010 SECONDA PROVA SCRITTA PER I LICEI SCIENTIFICI A INDIRIZZO SPERIMENTALE (PNI)

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \leq x \leq 5$ essendo g la derivata di una funzione f . Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in

$(0, 0)$, $(3, 0)$, $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ e raggi rispettivi 2 , 1 , $\frac{1}{2}$.



- a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?
- b) Per quali valori di x , $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
- c) Se $f(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.
- d) Si determinino i punti in cui la funzione ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

- a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O .
- b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2} .
- c) Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A . Si determini la retta r , parallela all'asse x , che stacca su D il segmento di lunghezza massima.
- d) Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x . Se si taglia W con piani ortogonali all'asse x , quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W .

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$, dove a_n è il coefficiente di x^n .
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?
5. Sia G il grafico di una funzione $x \rightarrow f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.
6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3 \cos t, 2 \sin t)$ al variare di t , $0 \leq t \leq 2\pi$.
7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenta la risposta.
8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.

L'integrale $\int_0^4 2\pi x(\sqrt{x}) dx$ fornisce il volume del solido:

- a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x ;
- b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y ;
- c) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio \sqrt{x} ;
- d) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

a) Per individuare un'espressione analitica di $g(x)$ si scrivono innanzitutto le equazioni delle circonferenze con i centri e i raggi assegnati; successivamente si ricavano le equazioni delle semicirconferenze, tenendo conto che per la prima e la terza si deve avere $y \geq 0$, per la seconda $y \leq 0$. Si ottiene:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ -\sqrt{-x^2+6x-8} & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ \sqrt{-x^2+9x-20} & \text{se } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

In corrispondenza di $x = 2$ e $x = 4$ è indifferente mettere il segno « \Rightarrow » nella seconda e terza riga (come abbiamo fatto), o in altre posizioni. Come si ricava dalle proprietà della circonferenza, per la funzione g il limite del rapporto incrementale destro in $x = -2$ è $+\infty$, il limite del rapporto incrementale in $x = 2$ è $-\infty$ e in $x = 4$ è $+\infty$, il limite del rapporto incrementale sinistro in $x = 5$ è $-\infty$. Questo comporta che la funzione non è derivabile nei punti citati. Il risultato si può naturalmente ottenere anche mediante l'espressione analitica di $g(x)$.

b) Essendo g la derivata di f , si deduce che f è strettamente crescente negli intervalli $]-2, 2[$ e $]4, 5[$, strettamente decrescente nell'intervallo $]2, 4[$. La continuità di f implica che per $x = 2$ si ha un massimo relativo, per $x = 4$ un minimo relativo.

- c) La funzione $f(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$ è la *funzione integrale* di $g(x)$ di punto iniziale -2 .

La funzione f è definita (e derivabile) in tutto l'intervallo $[-2, 5]$, ed è una delle funzioni (non l'unica!) di cui al punto precedente. I valori $f(4)$ e $f(1)$ si calcolano agevolmente pensando al significato geometrico dell'integrale definito, senza ricorrere ad integrali. Precisamente $f(4)$ è la differenza tra le aree del semicerchio di centro l'origine e raggio 2 e del semicerchio di centro $(3, 0)$ e raggio 1: si ottiene $f(4) = \frac{3\pi}{2}$. Il valore $f(1)$ corrisponde invece all'area della metà del segmento circolare rappresentata in figura 1.

Quest'area si ottiene, per esempio, sottraendo dall'area del semicerchio quella del triangolo mistilineo ABC , a sua volta calcolabile come differenza tra l'area del settore circolare AOC e del triangolo rettangolo BOC . Il punto C ha coordinate $(1, \sqrt{3})$ e dunque l'angolo α misura $\frac{\pi}{3}$. Si ottiene facilmente $f(1) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

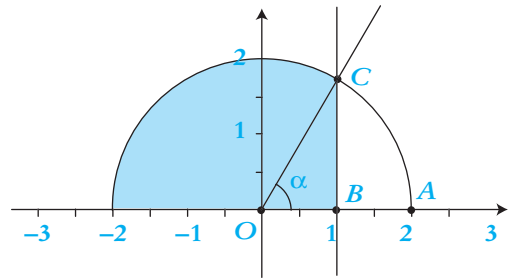


Figura 1

- d) La funzione f (si presume che il testo faccia riferimento alla funzione definita al punto precedente) è ovunque derivabile con derivata continua, e si ha $f'(x) = g(x)$. Poiché, come già osservato, g non è sempre derivabile, f non ha sempre derivata seconda; in ogni caso i punti in cui $f''(x) = 0$ sono i punti in cui g ha derivata prima nulla, ovvero $x = 0, x = 3, x = \frac{9}{2}$.

Per quanto riguarda l'andamento qualitativo di $f(x)$, usando i risultati precedenti e osservando che il segno di $f''(x)$ coincide con quello di $g'(x)$ si ottiene quanto segue.

- $f(-2) = 0; f(0) = \pi; f(5) = \frac{13\pi}{8}$.
- f è positiva per tutti gli $x > -2$ (perché l'area del primo semicerchio è maggiore di quella del secondo).
- f è strettamente crescente negli intervalli $]-2, 2[$ e $]4, 5[$, è stret-

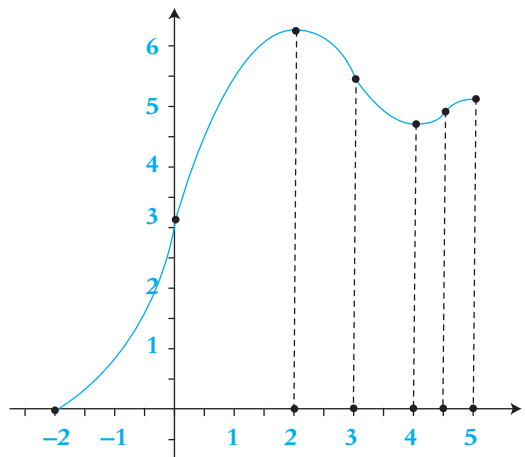


Figura 2

tamente decrescente nell'intervallo $]2, 4[$; ha derivata destra nulla in $x = -2$, derivata sinistra nulla in $x = 5$.

- f ha punti di flesso in corrispondenza a $x = 0$, $x = 3$, $x = \frac{9}{2}$; è convessa negli intervalli $] -2, 0[$ e $]3, \frac{9}{2}[$; è concava negli intervalli $]0, 3[$ e $] \frac{9}{2}, 5[$.

Il grafico in figura 2 illustra questo andamento.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

- a) La parabola di equazione $y^2 = 2x$ è simmetrica rispetto all'asse delle x ; il vertice è l'origine, il fuoco è $F_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; di conseguenza, la direttrice ha equazione $x = -\frac{1}{2}$. La parabola di equazione $y = x^2$ è simmetrica rispetto all'asse delle y ; il vertice è l'origine, il fuoco è $F_2\left(0, \frac{1}{4}\right)$; di conseguenza, la direttrice ha equazione $y = -\frac{1}{4}$ (fig. 3).

Per determinare i punti di intersezione è sufficiente risolvere il sistema (di quarto grado) costituito dalle equazioni delle curve. Si trovano i punti $O(0, 0)$ $A(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

- b) Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della *duplicazione del cubo* che, assieme a quelli della *quadratura del cerchio* e della *trisezione di un angolo*, costituisce uno dei tre problemi classici della geometria greca. Il problema può essere espresso come segue: noto lo spigolo di un cubo, costruire con riga e compasso lo spigolo di un cubo di volume doppio. La risoluzione richiede appunto la costruzione con riga e compasso di un segmento lungo $\sqrt[3]{2}$, nota l'unità di misura. La cosa non è possibile con riga e compasso, e quella proposta dal testo è proprio una delle costruzioni alternative, dovuta a Menecmo.

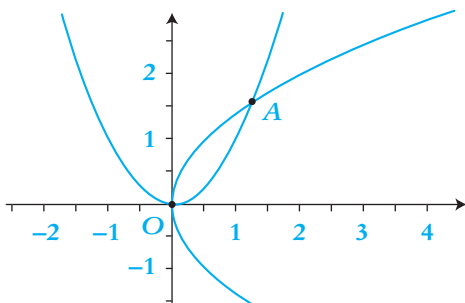


Figura 3

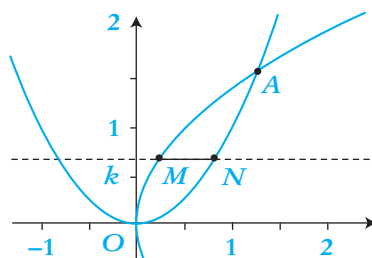


Figura 4

Per trovare un valore approssimato di $\sqrt[3]{2}$ basta applicare uno dei metodi iterativi alla ricerca dell'unica radice reale del polinomio $p(x) = x^3 - 2$. Avendosi $p(1) = -1 < 0$ e $p(2) = 6 > 0$, la radice si trova tra 1 e 2. Procediamo con il metodo di bisezione. Da $p\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ si deduce che la radice si trova tra 1 e $\frac{3}{2}$. Si giunge così all'intervallo $\left[\frac{161}{128}, \frac{81}{64}\right]$, intervallo che ha un'ampiezza di $\frac{1}{128} < 10^{-2}$.

Quindi $\frac{161}{128}$, ad esempio, costituisce un'approssimazione (per difetto) di $\sqrt[3]{2}$ con la precisione voluta.

- c) Una retta r parallela all'asse delle ascisse, e dunque di equazione $y = k$, stacca un segmento MN su \mathbf{D} se $0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}$.

La lunghezza di MN si esprime facilmente in funzione di k determinando le intersezioni della retta r con le due parabole; si ottiene: $\overline{MN} = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2}$. Si tratta

di trovare il massimo della funzione $f(k) = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2}$. Da $f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k$ si deduce che f cresce per $k < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e successivamente decresce. Il massimo richiesto

si trova dunque in corrispondenza della retta di equazione $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

- d) Poiché le sezioni di \mathbf{D} con rette perpendicolari all'asse x sono segmenti, eventualmente degeneri, le sezioni di \mathbf{W} con piani ortogonali all'asse x sono corone circolari, che degenerano in un punto se il piano passa per l'origine, in una circonferenza se il piano passa per il punto A .

Il volume di \mathbf{W} si calcola con un semplice integrale: $\pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (2x - x^4) dx = \frac{3\pi\sqrt[3]{4}}{5}$.

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. Un polinomio di grado n si può scrivere nella forma $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Iniziamo con un ragionamento elementare, senz'altro accettabile. La derivata prima di $p_n(x)$ è $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$; la derivata seconda è $n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2a_2$. Ad ogni derivazione diminuisce di 1 il grado del polinomio; il coefficiente del termine di grado massimo è a_n moltiplicato per $n(n-1)\dots$ con un numero di fattori pari all'ordine di derivazione. Questo permette di concludere nel senso voluto.

Per una dimostrazione più formale si deve ricorrere al *principio di induzione*.

- Se $n = 1$, $p_1(x) = a_1 x + a_0$, $p_1^{(1)}(x) = p_1'(x) = a_1 = 1! a_1$, quindi la formula è corretta.

- Supponiamo che la formula valga per $n-1$, ovvero che $p_{n-1}^{(n-1)}(x) = (n-1)!a_{n-1}$. Sia $p_n(x)$ un polinomio di grado n ; la sua derivata prima è $p_n'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$.

Il polinomio $p_n'(x)$ ha grado $n-1$ e il suo coefficiente del termine di grado massimo è na_n ; quindi per la sua derivata $(n-1)$ -esima, che coincide con la derivata n -esima di $p_n(x)$, si può applicare l'ipotesi induttiva: $p_n^{(n)}(x) = (n-1)!(na_n) = n!a_n$.

2. I triangoli PBC e PBA sono rettangoli in B perché la retta PB è perpendicolare in B al piano del triangolo e, quindi, a ogni retta del piano per B (figura 5). Il triangolo PAC è rettangolo in A per il teorema delle tre perpendicolari: PB è perpendicolare al piano ABC , AB è perpendicolare ad AC , quindi AC è perpendicolare al piano individuato da AB e PB , e dunque anche ad AP .

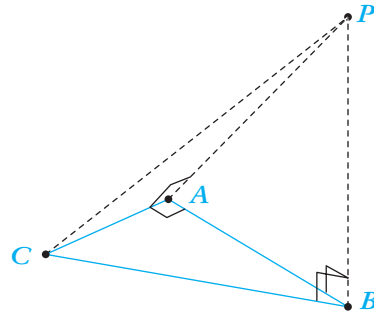


Figura 5

3. La retta r e il grafico di $y = e^x$ sono tra loro tangenti se passano per uno stesso punto e hanno ivi stessa retta tangente, cioè la stessa derivata. Questo si traduce nel sistema

$$\begin{cases} ax = e^x \\ a = e^x \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $x = 1$ e $a = e$. Dunque l'angolo richiesto ha per tangente il numero e ; la sua espressione approssimata in gradi e primi è $69^\circ 48'$.

4. La funzione f assegnata è continua in tutto \mathbb{R} , e ha limiti $-\infty$ e $+\infty$ rispettivamente per x tendente a $-\infty$ e $+\infty$. Inoltre per ogni $x \neq 0$ è derivabile con derivata $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2$. La funzione f è dunque strettamente crescente e, assumendo sia valori positivi che negativi, ha un unico zero. Essendo $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$, tale zero appartiene all'intervallo $[0, 1]$. Si può ora procedere, per esempio, con il metodo di bisezione, già illustrato nella risoluzione del problema 2, per trovare questo zero con la precisione voluta, ottenendo il valore 0,56.
5. Un grafico G è simmetrico rispetto a una retta se, ogni volta che contiene un punto P , contiene anche il punto P' simmetrico di P rispetto alla retta. Se $P(x, y)$ e $P'(x', y')$ sono due punti simmetrici rispetto alla retta $x = k$, allora $\frac{x+x'}{2} = k$, ovvero $x' = 2k - x$, ed $y' = y$. Basta dunque verificare che la funzione f associa lo stesso valore y ad x e a $2k - x$, cioè che cambiando x con

$2k - x$ l'espressione analitica della funzione non cambia.

6. Dalle equazioni $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ si ricava $\begin{cases} \frac{x}{3} = \cos t \\ \frac{y}{2} = \sin t \end{cases}$, da cui, elevando al qua-

drato e sommando, si ottiene l'equazione canonica di un'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Notiamo che il punto $A(3, 0)$ viene raggiunto due volte, in corrispondenza dei valori 0 e 2π del parametro t .

7. Il quesito può essere così semplificato: se Anna ha due figli, e *uno dei due* è femmina, qual è la probabilità che sia femmina anche l'altro? Le possibilità per i due figli sono: FF , FM , MF , con ovvio significato dei simboli. Abbiamo dunque tre casi possibili (ed equiprobabili), di cui uno solo favorevole. La probabilità richiesta è $1/3$.

Aggiungiamo che la risposta sarebbe invece stata $1/2$ se il quesito fosse stato: se Anna ha due figli, e *il figlio maggiore* è femmina, qual è la probabilità che sia femmina anche l'altro? In tal caso, infatti, l'informazione sul figlio maggiore è ininfluenza (i casi possibili sono solo FF , FM).

8. Si rinvia alla risoluzione del quesito con lo stesso numero nel tema di ordinamento.
9. Si rinvia alla risoluzione del quesito con lo stesso numero nel tema di ordinamento.

10. La risposta corretta è la b). La risposta si può giustificare mediante un calcolo diretto dell'integrale e del volume indicato, oppure con il seguente ragionamento (figura 6).

Si considera un punto $P(x, 0)$, con $0 \leq x \leq 4$ e il rettangolo «infinitesimo»

di base dx e altezza \sqrt{x} , come in fi-

gura. Al variare di x questi rettangoli coprono tutta la regione R : per ottenere il solido generato nella rotazione di R attorno all'asse y , basterà quindi «sommare» tutte le corone cilindriche ottenute ruotando questi rettangoli.

Poiché il volume di una di queste corone è $V_x = 2\pi x \sqrt{x} dx$ (l'area di base, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è $2\pi x dx$, l'altezza è lunga \sqrt{x}), il volume totale è proprio l'integrale proposto.

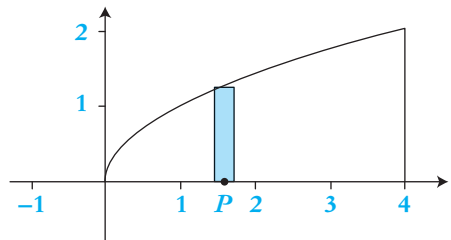


Figura 6

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

Il tema proposto quest'anno, per quanto riguarda sia i problemi sia i quesiti, era senz'altro alla portata degli studenti dell'indirizzo PNI.

Come già per lo scorso anno, anche in questo tema i problemi richiedono principalmente conoscenze di Analisi, tralasciando questioni di Geometria e di Trigonometria che invece comparivano regolarmente nei problemi degli anni precedenti.

Ancora una volta è il caso di segnalare che sarebbe oltremodo opportuno un *Syllabus* che precisi quali sono gli argomenti su cui verte la prova d'esame. Tra l'altro, alcuni degli argomenti trattati con un certo dettaglio nel programma PNI non vengono quasi mai proposti, come è il caso dell'Algebra lineare.

Vediamo alcune osservazioni entrando nello specifico.

- Nel problema 1 sarebbe stato opportuno segnalare, nel punto d), che la funzione f a cui si fa riferimento è quella particolare introdotta al punto c), e non una generica primitiva come definita all'inizio.
- Sempre nella domanda d) del problema 1, non è chiaro il significato esatto dell'espressione «andamento qualitativo». Per esempio, la questione della derivata destra in -2 e sinistra in 5 , era da trattare?
- Nella prima domanda del questionario una dimostrazione formale richiede il *Principio di induzione*, argomento che purtroppo non è sempre trattato nei corsi. D'altra parte, il quesito è stato proposto anche agli studenti del Liceo di ordinamento.
- La domanda 3 del questionario è formulata in maniera che poteva indurre in difficoltà lo studente. Sarebbe stato meglio dire esplicitamente «Si trovi a in modo che la retta di equazione $y = ax$ sia tangente al grafico di $y = e^x$ ». E poi, la determinazione in gradi e primi sessagesimali dell'angolo richiesto poteva esser fatta semplicemente con una calcolatrice, o era richiesta una tecnica numerica?
- Nel quesito 4 la richiesta di calcolare lo zero *con la precisione di due cifre decimali* è un po' ambigua. Meglio sarebbe stato seguire la tradizione, indicando un certo numero di cifre decimali esatte, o, meglio ancora, fare una richiesta come quella della domanda b) del problema 2 (cercare un valore approssimato a meno di 10^{-2}). Segnaliamo che la trattazione di questo argomento in molti dei manuali lascia a desiderare, e non è sempre ben definito che cosa si intenda con l'espressione *n cifre decimali esatte*.
- Il quesito 7 ha suscitato numerose discussioni sui siti web, e molti autori hanno proposto come soluzione $\frac{1}{2}$, anziché $\frac{1}{3}$. Forse una formulazione «più asciutta» del quesito avrebbe facilitato la ricerca della soluzione corretta. In ogni caso la questione non è banale (e forse è poco adatta per un quesito all'esame di Stato); in effetti, il problema è stato trattato da Martin Gardner ed è noto come situazione in cui si è facilmente portati a dare una risposta errata.
- Il quesito 10 è uno dei più interessanti, in quanto propone il calcolo del volume

di un solido di rotazione in una forma che non è quella usuale. Molte delle soluzioni proposte sui giornali e sui siti web erano sbagliate.

- Un'ultima osservazione, di tipo «stilistico». Nel problema 2 per la regione piana D si usa il carattere tondo grassetto. Nel quesito 10 per la regione piana R si usa invece il corsivo chiaro (non grassetto).

Luciano Battaia

Liceo Scientifico «M. Grigoletti», Pordenone
batmath@gmail.com
