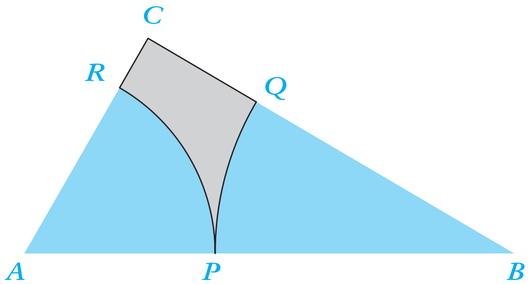
ESAME DI STATO 2008 SECONDA PROVA SCRITTA PER I LICEI SCIENTIFICI DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e il valore massimo di $S(x)$.

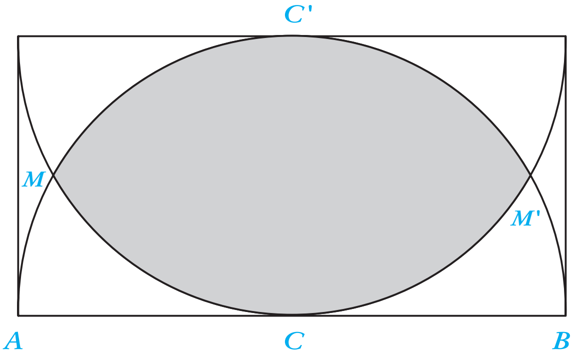
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliando con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$, si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

QUESTIONARIO

1. Si consideri la seguente proposizione: «Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area». Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661-1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{2008}}{2^x} = 0$.

5. Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}.$$

6. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

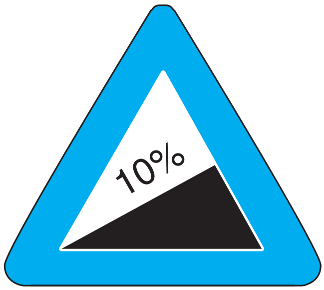
7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9. Sia $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x \to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

10. Secondo il codice della strada il segnale di «salita ripida» (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.
Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?



Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

1.a) Date le caratteristiche del triangolo, si ha subito $AC = \frac{a}{2}$ e $BC = \frac{a}{2}\sqrt{3}$;

quindi, affinché si possano tracciare gli archi PR e PQ internamente al triangolo, dovrà essere:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \le a - x \le \dfrac{a}{2} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{a}{2} \le x \le a \end{cases} \quad \text{e, in definitiva,} \quad \frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

1.b) Calcoliamo l'area richiesta come differenza tra quella del triangolo ABC e la somma delle aree dei due settori circolari APR e BPQ:

$$\text{Area settore } BPQ = \frac{\pi}{12}x^2; \qquad \text{Area settore } APR = \frac{\pi}{6}(a-x)^2$$

Area quadrilatero mistilineo $PQCR = S(x) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi}{12}x^2 - \dfrac{\pi}{6}(a-x)^2 =$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}(3x^2 - 4ax + 2a^2)$$

Si tratta di una funzione polinomiale di secondo grado, definita su un intervallo chiuso e limitato. Il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza del massimo e del minimo richiesti. Poiché $y = S(x)$ è l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y e concavità verso il basso, almeno uno dei due estremi dell'intervallo $\left[a/2, a\sqrt{3}/2\right]$ è uno dei punti cercati.

L'ascissa del vertice è $2a/3$. Dunque la funzione è crescente da $a/2$ a $2a/3$ e decrescente da $2a/3$ a $a\sqrt{3}/2$. Pertanto, il massimo è assunto per $x = 2a/3$ e il minimo si ottiene confrontando i valori ai due estremi. Con qualche calcolo, si ottengono i valori richiesti:

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}\left(\frac{a^2}{4} + 2\frac{a^2}{4}\right) = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{16}a^2 \cong 0{,}02016 \cdot a^2$$

$$S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12}\left(\frac{3}{4} + 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)a^2 = \frac{6\sqrt{3} - \pi\left(17 - 8\sqrt{3}\right)}{48} \cong 0{,}01076 \cdot a^2$$

Pertanto, il minimo si ottiene per $x = a\sqrt{3}/2$. In definitiva, si ha:

$$\textit{area massima} = S\left(\frac{2a}{3}\right) = \left(\frac{9\sqrt{3} - 4\pi}{72}\right)a^2$$

$$\textit{area minima} = S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6\sqrt{3} - \pi\left(17 - 8\sqrt{3}\right)}{48}a^2.$$

1.c) Con riferimento alla fig. 1, ricordiamo che: $AC = a/2$, $AH = a/4$, $CH = a\sqrt{3}/4$.

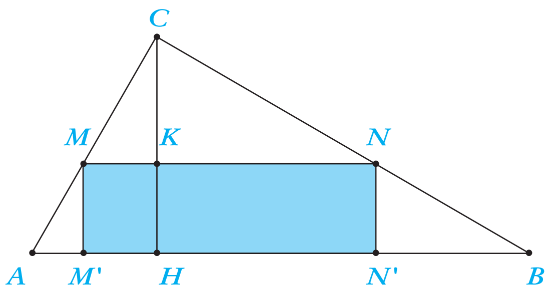


Figura 1

Posto $MN = x$ con $0 \le x \le a$, per la similitudine tra i triangoli MNC e ABC, si ottiene facilmente:

$$CK = \frac{\sqrt{3}}{4}x \qquad \text{e} \qquad KH = \frac{\sqrt{3}}{4}(a-x)$$

da cui $\quad$ *area rettangolo* $= F(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x(a-x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(ax - x^2)$

Abbiamo nuovamente una funzione polinomiale di secondo grado (parabola), definita su un intervallo chiuso e limitato; poiché $F(0) = F(a) = 0$, il massimo (assoluto e relativo) deve essere nel vertice. Dato che l'ascissa del vertice vale $a/2$, si conclude:

area massima $= \dfrac{\sqrt{3}}{16}a^2$ quando $x = \dfrac{a}{2}$, ovvero quando M e N sono i punti medi dei cateti AC e BC.

Aggiungiamo che quest'ultimo risultato vale in generale, qualunque sia il triangolo considerato (purché gli angoli in A e in B siano acuti o retti).

1.d) Tenendo presenti le indicazioni del testo sulle sezioni di W con piani perpendicolari ad AB, risulta che W è l'unione di due piramidi W_1 e W_2 di vertici A e B, e con la base comune coincidente con il quadrato costruito sull'altezza CH ortogonalmente al piano del triangolo ABC (fig. 2).

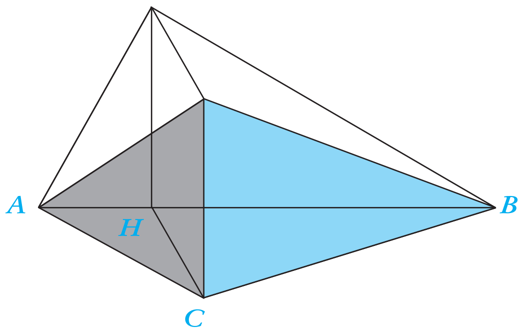


Figura 2

$$\textit{Area base comune} = \overline{CH}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}a^2$$

$$h_1 = AH = a/4, \qquad h_2 = BH = 3a/4.$$

Dunque: $\quad \text{Vol}(W) = \text{Vol}(W_1) + \text{Vol}(W_2) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{16}a^2\left(\dfrac{a}{4} + \dfrac{3a}{4}\right) = \dfrac{1}{16}a^3.$

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

2.a) Rifacciamo la figura, inserendo gli elementi utili al calcolo dell'area richiesta (fig. 3).
Per costruzione, $CM = CQ = CN$ e $QM = QC = QN$; quindi i triangoli CMQ e CNQ sono equilateri e l'angolo $M\hat{C}N$ ha ampiezza $2\pi/3$ (si veda il commento alla fine dell'articolo per la posizione del secondo semicerchio).
L'area del settore circolare di centro C è un terzo dell'area del corrispondente cerchio, cioè è $\pi/3$. L'area del triangolo MCN è $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

L'area richiesta è il doppio della differenza tra le aree sopra calcolate: $2\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$.

Chi avesse affrontato la domanda ricorrendo agli integrali, si sarebbe imbattuto in calcoli molto più complicati.

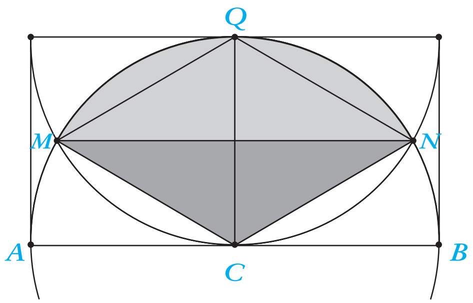


Figura 3

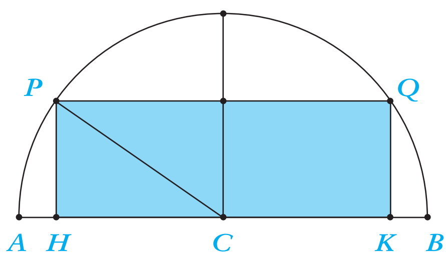


Figura 4

2.b) Facciamo riferimento alla figura 4.
Posto $P\hat{C}H = x$, con $0 \le x \le \pi/2$, si ricava $\overline{PH}=\sin x$ e $\overline{HC}=\cos x$. La funzione di cui dobbiamo determinare il massimo è $S(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$.
È evidente (non è necessario derivare) che $S(x) = \sin 2x$ è massima quando $\sin 2x = 1$, ossia quando $x = \pi/4$. Il rettangolo corrispondente è la metà del quadrato inscritto nel cerchio e la sua area è uguale a 1.
In alternativa, si può porre $\overline{PH}=x$ con $0\le x\le 1$. Si ha $\overline{PQ}=2\sqrt{1-x^2}$, da cui segue che la funzione da massimizzare è $S(x)=2x\sqrt{1-x^2}$. Poiché $S(0)=S(1)=0$, il massimo (garantito dal teorema di Weierstrass) è un punto compreso fra 0 ed 1. Derivando $S(x)$, con qualche calcolo, si trova che il massimo è nel punto $x=1/\sqrt{2}$ e, quindi, si ottiene nuovamente che l'area massima è $2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$.

2.c) Posto $P\hat{C}B = x$, si ricava: $\overline{PH} = \text{sen}\, x$; $\overline{CH} = |\cos x|$; $\overline{AH} = 1 + \cos x$

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\sin x\,(1+\cos x); \qquad S_2(x) = \frac{1}{2}\sin x\,|\cos x|;$$

$$f(x) = \frac{(1/2)\cdot\sin x\,(1+\cos x)}{(1/2)\cdot\sin x\,|\cos x|} = \frac{1+\cos x}{|\cos x|}$$

Le condizioni geometriche impongono, per la funzione f, che sia

$$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

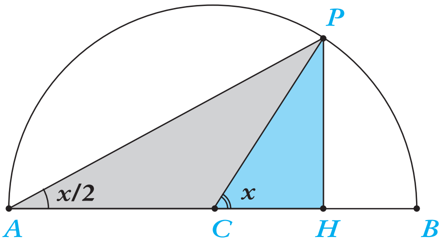


Figura 5

2.d) Per studiare la funzione $f(x)$, notiamo che si può scrivere:

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{|\cos x|} = \left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right| = \left|\frac{1}{\cos x} + 1\right|.$$

Converrà pertanto studiare $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ (si tratta della funzione *secante*, ormai sconosciuta alla maggior parte degli studenti) e quindi applicare al grafico di g prima una traslazione e infine il valore assoluto. Dal momento che la funzione è periodica di periodo 2π, limiteremo lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$, privato dei punti in cui il coseno si annulla.

Dominio. Deve essere $\cos x \neq 0$; quindi $f(x)$ è definita sugli x tali che $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $x \neq \dfrac{3}{2}\pi$.

Segno. Ovviamente $\dfrac{1}{\cos x} > 0$ se e solo se $\cos x > 0$. Pertanto, $f(x)$ è negativa per $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ e positiva per $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$. Le rette $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3}{2}\pi$ sono asintoti verticali.

Frontiera. $f(0)=f(2\pi)=1$; $\lim_{x\to(\pi/2)^{\mp}} \frac{1}{\cos x} = \pm\infty$; analogamente, $\lim_{x\to(3\pi/2)^{\mp}} \frac{1}{\cos x} = \mp\infty$.

Crescenza. Si ha $g'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Dunque, la derivata di $g(x)$ è positiva negli intervalli in cui è positiva la funzione sen x (e $g(x)$ è definita), cioè per $x \in \left]0, \pi/2\right[\cup \left]\pi/2, \pi\right[$.
I punti $(0; 1)$ e $(2\pi; 1)$ sono punti di minimo relativo, mentre in $(\pi; -1)$ c'è un massimo relativo.

Convessità. Si ha $g''(x) = \frac{\cos^3 x + 2\cos x \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$. Dunque, la derivata seconda risulta positiva se e solo se si ha $\cos x > 0$. Ne segue che g è convessa in $[0, \pi/2[$ e $]3\pi/2, 2\pi]$, ed è concava in $]\pi/2, 3\pi/2[$. Non ci sono punti di flesso.
Nelle figure 6 e 7 riportiamo i grafici di g e di f. Le caratteristiche di f sono facilmente deducibili da quelle viste per g.

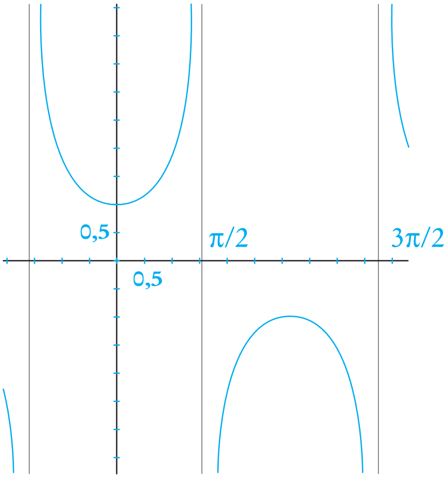


Figura **6** – Grafico di *g (x)*

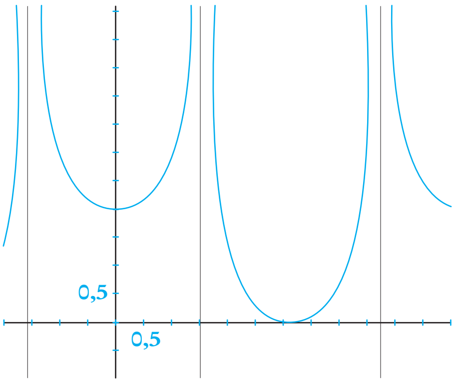


Figura **7** – Grafico di *f (x)*

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

1. L'affermazione è chiaramente falsa. Per provarlo, è sufficiente pensare, per esempio, a un cilindro di base S e altezza h e a un cono di base $3S$ e uguale altezza h, collocati su un piano π, e al fascio di piani paralleli a π; oppure, si possono considerare due sfere uguali e un fascio di piani che non sia parallelo alla retta passante per i centri. È chiaro il riferimento al principio di Cavalieri, del quale la proposizione data costituisce l'enunciato inverso.

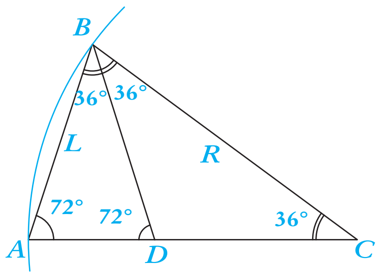


Figura 8

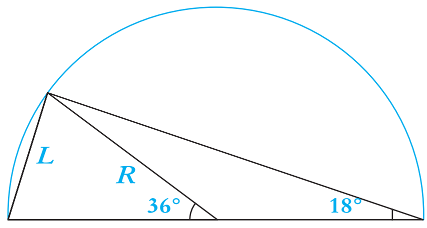


Figura 9

2. Ricordiamo in primo luogo che, per provare che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio, basta osservare la similitudine tra i triangoli isosceli ABC e ABD nella fig. 8 (dove BD è la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$). La richiesta di questa dimostrazione era implicitamente presente nel tema del 2007, al punto (d) del problema 1. Quindi, come suggerisce il testo del quesito, indicato con L il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio R, vale la relazione $L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

D'altra parte (fig. 9), si ha $L = 2R\sin\frac{\pi}{10}$; si conclude che $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{L}{2R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. Indichiamo con x ed h rispettivamente il raggio e l'altezza della casseruola. La superficie S è $\pi x^2 + 2\pi x h$ (va considerata una sola base). Si ricava $h = \frac{S-\pi x^2}{2\pi x}$, con le limitazioni $0 < x < \sqrt{S/\pi}$. Il volume della casseruola si può allora scrivere $V(x) = \frac{1}{2}x(S-\pi x^2)$.

La funzione $V(x)$ si annulla negli estremi, mentre la derivata $V'(x)$, di facile determinazione, si annulla solo per $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, che è dunque un massimo per $V(x)$.

La casseruola richiesta ha dimensioni: $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ ed $h = \frac{S-\pi x^2}{2\pi x} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

Con facili calcoli, si ottiene che il volume massimo è $\sqrt{\frac{S^3}{27\pi}}$.

4. Per l'enunciato delle *regole di de L'Hôpital* si rimanda a un manuale di analisi. Osservato che le funzioni $f(x) = x^n$ (per qualsiasi naturale n) e $g(x) = 2^x$ sono continue e derivabili, con $g'(x) \neq 0$, e che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{2008}}{2^x}; \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2008x^{2007}}{(\ln 2)2^x}; \qquad \dots; \qquad \frac{f^{(2008)}(x)}{g^{(2008)}(x)} = \frac{2008!}{(\ln 2)^{2008} \cdot 2^x},$$

la tesi segue dal fatto che l'ultimo rapporto ha limite nullo.
In alternativa, si può riscrivere il rapporto assegnato nel modo seguente:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{2008}}{2^x} = \frac{e^{2008 \cdot \ln x}}{e^{x \cdot \ln 2}} = \mathrm{e}^{2008 \cdot \ln x - x \cdot \ln 2} = \mathrm{e}^{x\left(2008 \cdot \frac{\ln x}{x} - \ln 2\right)}.$$

Usando la stessa regola di de L'Hôpital per ricavare $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, si conclude ancora che il limite è zero.

5. Dalle prime tre condizioni segue che $x = 0$ è uno zero doppio e che $x = 1$ è uno zero di P: quindi $P(x) = ax^2(x-1)$. La condizione sull'integrale permette di trovare che $a = -1$: infatti

$$\frac{1}{12} = \int_0^1 a(x^3 - x^2)dx = a\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = a\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}a.$$

Il polinomio richiesto è $P(x) = -x^3 + x^2$.

6. La condizione enunciata nel testo equivale all'uguaglianza $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} = 2\binom{n}{2}$.

Esplicitando quest'ultima, si ricava, con facili passaggi algebrici, l'equazione di secondo grado $n^2 - 9n + 14 = 0$, che ha come soluzioni $n = 2$ ed $n = 7$. La prima soluzione va scartata, poiché deve essere $n \geq 3$; si conclude $n = 7$.

7. Riscriviamo l'equazione nel modo seguente: $k = -x^3 + 3x^2$. Il numero delle sue soluzioni è il numero delle intersezioni, al variare di k in $\Re$, tra la curva Γ di equazione $y = -x^3 + 3x^2$ e la retta parallela all'asse x di equazione $y = k$. La curva Γ è una cubica, per il cui grafico è sufficiente un rapido studio della derivata prima (per la collocazione dell'eventuale massimo e minimo relativo) e – volendo – della derivata seconda (per l'individuazione del flesso, centro di simmetria della curva, che si ottiene anche come punto medio del massimo e del minimo locale).
$y' = -3x^2 + 6x > 0$ per $0 < x < 2$. Dunque $A = (0; 0)$ e $B = (2; 4)$ sono i punti di minimo e massimo locali. Il centro di simmetria della curva è $C = (1; 2)$.
Il sistema si può facilmente discutere per via grafica (fig.10):

per $k < 0$	1 soluzione
per $k = 0$	3 soluzioni, di cui 2 coincidenti ($x = 0$)
per $0 < k < 4$	3 soluzioni distinte
per $k = 4$	3 soluzioni, di cui 2 coincidenti ($x = 2$)
per $k > 4$	1 soluzione

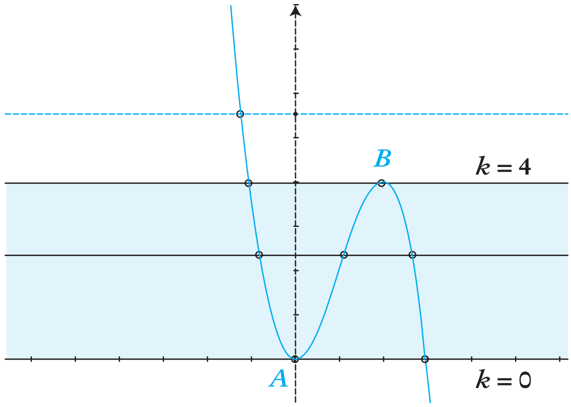


Figura **10**

8. Sia $f(x)=\pi^x-x^\pi$; perché il termine x^π abbia senso, è necessario che sia $x\geq 0$, poiché non sono definite le potenze con esponente irrazionale di numeri negativi. Quanto alle derivate prima e seconda, si ha:

$$f'(x)=(\ln\pi)\cdot\pi^x-\pi\cdot x^{\pi-1};\qquad f''(x)=(\ln\pi)^2\cdot\pi^x-\pi(\pi-1)\cdot x^{\pi-2}.$$

$f'(\pi)=(\ln\pi)\cdot\pi^\pi-\pi\cdot\pi^{\pi-1}=\pi^\pi(\ln\pi-1)$. Poiché $\pi>e$, si ha $\ln\pi>1$ e, quindi, $f'(\pi)>0$.

$f''(\pi)=(\ln\pi)^2\cdot\pi^\pi-\pi(\pi-1)\cdot\pi^{\pi-2}=\pi^\pi\left((\ln\pi)^2-1+\dfrac{1}{\pi}\right)$. La condizione $\ln\pi>1$ implica $(\ln\pi)^2>1$ e, dunque, $f''(\pi)>0$.

9. Osservato che il dominio di f è $\Re-\{1\}$, si può scrivere direttamente:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{per } x>1\\ -(x+1) & \text{per } x<1\end{cases};\ \text{dunque}\ \lim_{x\to1^-}f(x)=-2,\ \text{mentre}\ \lim_{x\to1^+}f(x)=2.$$

Essendo diversi i limiti destro e sinistro, la funzione non ammette limite per $x\to1$.

10. Facendo riferimento al concetto matematico di *pendenza* di una retta nel piano cartesiano, definiamo pendenza di un tratto di strada L il rapporto tra il dislivello h superato nel percorrere il suddetto tragitto e la lunghezza b del *cammino proiezione* su un piano orizzontale ([1]).

([1]) Nei corsi preparatori all'esame per la patente automobilistica la pendenza di un tratto di strada è di solito definita come il rapporto tra il dislivello superato e la lunghezza del tragitto. Non è chiaro (chi scrive non ha approfondito la questione) se tale sia la definizione del codice della strada, stabilita in modo esplicito da qualche legge, o se si tratti di una regola di calcolo approssimato, valida per pendenze non troppo elevate, che dipende dal fatto che è più facile misurare lo spazio percorso (ad esempio col contachilometri) che non il cammino proiezione.

Nel caso in esame, si ha: $pendenza = \frac{h}{b} = \frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}} \cong 0.071 \cong 7\%.$

Poiché $\frac{h}{b} = \tan\alpha$, si ottiene subito l'angolo: $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}}\right) \cong 4°03'43''.$

CONSIDERAZIONI E COMMENTI

I problemi assegnati sono di difficoltà media, privi di insidie e sufficientemente articolati. Entrambi prendono le mosse da situazioni geometriche; di conseguenza, gli studenti che puntavano a superare la prova d'esame concentrandosi soprattutto sull'analisi (o, peggio, unicamente sui suoi aspetti procedurali) hanno avuto un'amara sorpresa. Poco male, se questo aiuta a rilanciare la geometria, ma sarebbe preferibile che ci fossero, in tal senso, indicazioni ministeriali esplicite.

Nel punto *a*) del secondo problema le condizioni fornite per la costruzione di Γ_1 sono insufficienti. C'è, in verità, una figura che non lascia dubbi su quello che lo studente deve fare; tuttavia preferiamo un testo preciso. Una lieve ambiguità è presente anche nel punto *d*), dove si poteva ritenere che la funzione f da studiare non fosse quella vista nella correzione, ma

$$f(x) = \frac{(1+\cos x)\sin x}{|\cos x|\sin x}$$

ottenendo, così, un dominio diverso. In genere, i commissari hanno, giustamente, accettato entrambe le versioni.

I quesiti, come al solito, sono piuttosto eterogenei non solo per gli argomenti trattati, ma anche per il livello di difficoltà.

Nel primo non è chiaro il ruolo dell'avverbio nella chiusura del testo: «motivare *esaurientemente* la risposta». L'estensore richiedeva un'esplicita citazione del principio di Cavalieri?

Il secondo quesito, non particolarmente impegnativo, è una variazione sul tema della sezione aurea (caro agli estensori della prova, a quanto sembra).

Il terzo, il quarto, il quinto, il settimo, l'ottavo e il nono quesito vertono esplicitamente sul programma del quinto anno. In particolare, il problema di massimo/minimo e la domanda teorica con conseguente applicazione sono richieste ricorrenti nelle verifiche effettuate in corso d'anno; si tratta di domande così tipiche da portarci a suggerire che nella prova d'esame diventino esplicitamente obbligatorie. Relativamente al quarto quesito, tuttavia, si fa notare che non c'è *una* regola di de L'Hôpital; forse sarebbe stato opportuno richiamare prima l'attenzione del candidato sulla particolare forma indeterminata proposta e chiedere, quindi, l'enunciazione del teorema relativo. Quasi tutti gli studenti hanno compreso gli aspetti ricorsivi dell'applicazione, ma è doloroso dover sottolineare che ben pochi hanno enunciato in modo corretto i teoremi richiesti.

Il sesto quesito non richiede grandi competenze e può avere lo scopo, tutt'al più, di verificare che lo studente abbia ben chiara la nozione di progressione aritmetica e sappia che cosa sono i coefficienti binomiali: ci si domanda se ha ancora senso proporre quesiti di questo tipo, che fanno riferimento a elementi di calcolo combinatorio al di fuori di un contesto che dia loro un senso.

Il decimo quesito, il più facile, presenta contenuti matematici davvero modesti per un tema d'esame. Nel caso in cui qualche studente abbia definito la pendenza di un tratto di strada come il rapporto tra il dislivello superato e la lunghezza del tragitto, la risoluzione – purché coerente – ci sembra ugualmente accettabile, anche perché, dato che per angoli «piccoli» seno e tangente si confondono, la differenza tra i risultati numerici non è significativa.

In ultima analisi, l'impressione generale è di una prova accettabile: non troppo impegnativa, né troppo arida, con un paio di quesiti poco significativi, ma sostanzialmente 'onesta' nei confronti dei candidati. Al di là del merito specifico della prova di quest'anno, tuttavia, le precedenti osservazioni suggeriscono una domanda, crediamo, già posta più volte e da più parti: perché non introdurre l'abitudine di fornire, insieme al testo della seconda prova, anche la correzione e una griglia di valutazione?

Elisa Cattelan

Liceo Scientifico Statale «P. Lioy» di Vicenza
elisa.cattelan@yahoo.it