ESAME DI STATO 2002 SECONDA PROVA SCRITTA PER IL LICEO SCIENTIFICO A INDIRIZZO SPERIMENTALE (PNI)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 *dei* 10 *quesiti in cui si articola il questionario.*

Problema 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali a un numero reale a non nullo. Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x, y)$ che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

Problema 2

I raggi $OA = OB = 1$ *metro* tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

a. il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';

b. la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';

c. un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

Questionario

1. Se a e b sono numeri positivi assegnati, quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnanti sono n?
2. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Meré* (1610-1685), amico di *Blaise Pascal*: «giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?».

3. Assumendo che i risultati – X, 1, 2 – delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

4. Calcolare

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}\right)$$

5. Cosa si intende per *funzione periodica*? Qual è il *periodo* di $f(x) = -sen\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di sen$2x$?

6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ ($p, q \in R$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

7. Data la funzione $f(x) = e^x - \text{sen}x - 3x$ calcolarne i limiti per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

8. Verificare che la funzione $3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

9. Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x$.

10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

Durata massima della prova: 6 *ore. Era consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.*

Risoluzione del Problema 1

Le condizioni iniziali si esprimono nel sistema $\begin{cases} x+y = a \\ x/y = a \end{cases}$ con $a \neq 0$ e $y \neq 0$.

1. Fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico Oxy, possiamo interpretare il sistema come intersezione di un fascio di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, esclusa la bisettrice stessa, e un fascio proprio di rette passanti per l'origine degli assi, escluso l'asse delle ascisse. Ogni retta del primo fascio deve di conseguenza essere privata del punto di ascissa nulla. Fissato il parametro a, le rette ottenute si intersecano in uno ed un sol punto P di coordinate:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{a+1} \\ y = \dfrac{a}{a+1} \end{cases} \quad \text{cioè: } \left(\frac{a^2}{a+1};\ \frac{a}{a+1}\right)$$

tranne nel caso in cui $a = -1$ per cui le rette ottenute $\begin{cases} x+y = -1 \\ x/y = -1 \end{cases}$ sono parallele e distinte.

Per $a > 0$ il punto appartiene al primo quadrante; per $a < 0$, il punto si trova nel secondo o nel quarto quadrante.

2. Dal sistema iniziale si determina l'equazione cartesiana del luogo geometrico γ: $x + y = x/y$, da cui si ricava $x = \dfrac{y^2}{1-y}$, con $y \neq 1$ e, se si tiene conto delle condizioni iniziali, $y \neq 0$.

3. Il luogo γ è un'iperbole non equilatera, avente per asintoti le rette $y = 1$ ed $y = -x - 1$, dal cui grafico occorre togliere il punto $O(0, 0)$. Non sarebbe difficile studiare il luogo γ nella forma ottenuta, con y variabile indipendente, ma per semplicità conviene prima rappresentare il luogo γ', simmetrico di γ rispetto alla retta $y = x$. L'equazione di γ' si ottiene scambiando le variabili: $x^2 + xy = y$, ovvero $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, con $x \neq 1$ e, se si tiene conto della condizione iniziale, $x \neq 0$.
Ovviamente si tratta ancora di un'iperbole i cui asintoti sono la retta $x = 1$ e lo stesso asintoto $y = -x - 1$ dell'iperbole iniziale. Posto $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$, la derivata prima è $f'(x) = \dfrac{2x - x^2}{(1-x)^2}$ e la derivata seconda $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$. La funzione quindi ha un minimo relativo per $x = 0$ e un massimo relativo in $x = 2$. Il centro di simmetria della curva è $O'(1, -2)$. Il grafico è riportato nella figura 2.

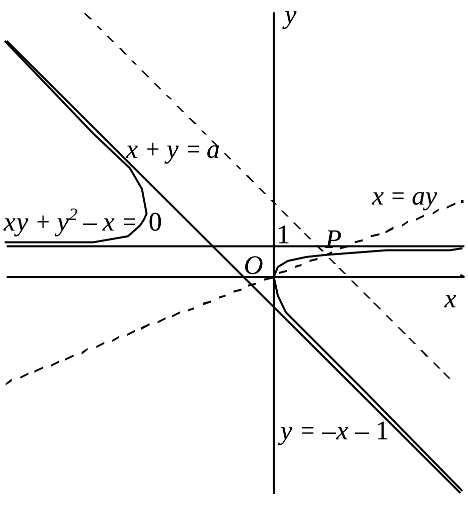

Figura 1. *Grafico del luogo* γ.

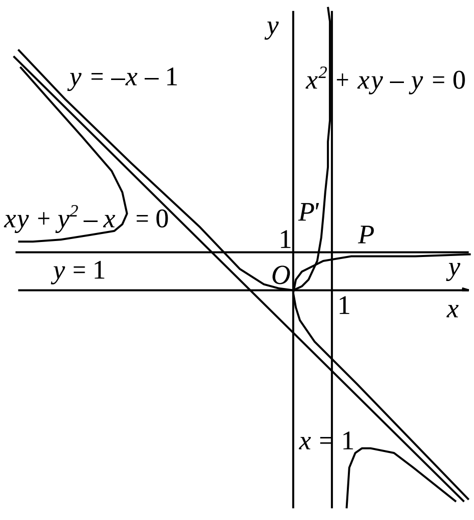

Figura 2. *Grafico dei luoghi* γ *e* γ'.

4. Per determinare l'area richiesta, determiniamo i punti di intersezione tra le due curve tralasciando la condizione iniziale $x \neq 0$. Le due curve si incontrano

oltre che nell'origine O anche nel punto R (1/2; 1/2). Data la simmetria della regione limitata di piano di cui occorre trovare l'area rispetto alla retta $y = x$, l'area è data da:

$$A = 2\int_0^{1/2} \left(x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx = 2\int_0^{1/2} \left(2x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \approx 0{,}113706$$

Per calcolare – come era richiesto – un valore di questa area con metodo approssimato si può, ad esempio, usare il *metodo dei trapezi* applicato alla funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ nell'intervallo $\left[0,\ 1/2\right]$ e poi sottrarre il doppio di questa area da quella di un quadrato di lato 1/2.

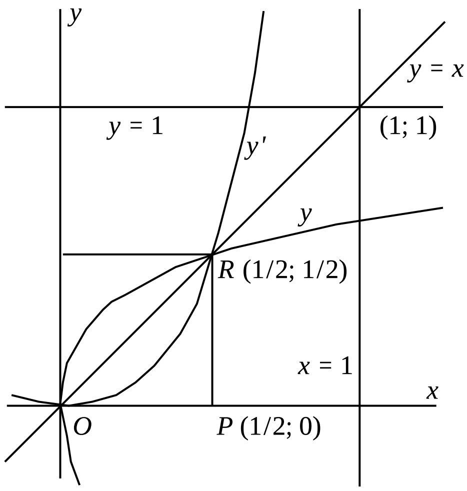

Figura 3. *Grafico della regione compresa tra* γ *e* γ'.

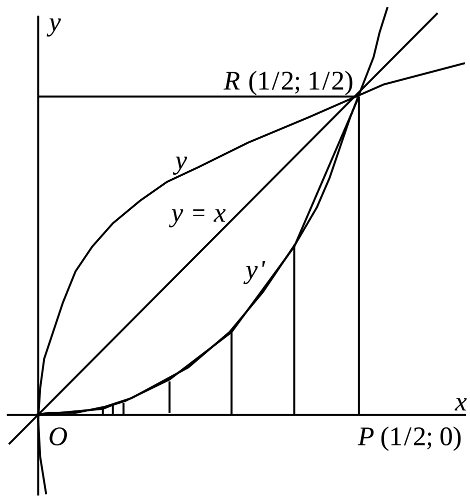

Figura 4. *Metodo dei trapezi per determinare numericamente l'area compresa tra* γ *e* γ'.

Vogliamo determinare, con il metodo dei trapezi, l'area del triangolo mistilineo OPR. La formula è:

$$Area(OPR) \approx \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(b) + 2f(x_2) + \quad + 2f(x_{n-1}) \Big)$$

Dividendo l'intervallo $\left[0,\ 1/2\right]$ in cinque parti uguali, si ricava:

$$Area(OPR) \approx \frac{1}{20}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{1}{10}\right) + 2f\left(\frac{2}{10}\right) + 2f\left(\frac{3}{10}\right) + 2f\left(\frac{4}{10}\right) \right).$$

$$Area(OPR) \approx \frac{89}{1260} = 0{,}070634$$

Quindi l'area richiesta è approssimativamente:

$$A \approx \frac{1}{4} - 2 \quad Area(OPR) = \frac{137}{1260} = 0,10873 \quad ,$$

con un errore percentuale del 4,4%. Il valore trovato per l'area è approssimato per difetto perché, essendo $f(x)$ convessa nell'intervallo considerato, l'area del triangolo mistilineo OPR è stata determinata per eccesso.

5. Nel caso in cui $x = 1$, tornando al sistema iniziale, si ottiene $\begin{cases} 1+y = a \\ 1/y = a \end{cases}$,

che geometricamente, per ogni valore di a, rappresenta due rette parallele all'asse delle ascisse. Tali rette coincidono se $1 + y = 1/y$; quest'ultima è una celebre equazione della matematica, collegata alla sezione aurea, che si può anche scrivere nel seguente modo: $y^2 + y - 1 = 0$, oppure sotto forma di proporzione «continua»: $(1 + y) : 1 = 1 : y$.

Le soluzioni sono $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ed $y = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Nell'ipotesi data, quindi, il primo valore della y trovato è la *sezione aurea* di un segmento unitario; pertanto, in tal caso, il rapporto tra il numero $x = 1$ e il numero y è il *rapporto aureo*: $\frac{x}{y} = \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618$

Risoluzione del Problema 2

a. I calcoli si semplificano se si indica con x il raggio di base del primo cono. Dovendo allora essere $0 \leq 2\pi x \leq 2\pi$, ne segue che $0 \leq x \leq 1$. Il raggio di base del secondo cono sarà pertanto $1 - x$. Il volume del primo cono, espresso in m^3, diventa:

$$V_1(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

Ci si può limitare a esaminare la funzione

$$f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1.$$

La derivata prima è: $f'(x) = \frac{x\left(2 - 3x^2\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$; studiandone il segno, si trova che il primo cono ha il volume massimo quando il raggio di base è

$$x = r_1 = \sqrt{2/3} \approx 0,816$$

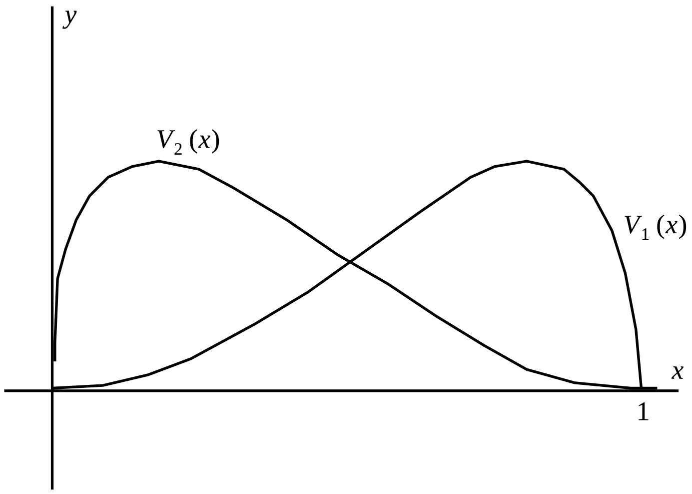

Figura 5. *Grafico del volume dei due coni in funzione del raggio di base del primo cono.*

Il volume massimo del primo cono vale dunque:

$$V_1 = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3},$$

L'area del settore circolare corrispondente diventa:

$$S_1 = \pi\sqrt{2/3} \approx \pi \;\; 0{,}816$$

Quindi: se il volume del primo cono è massimo, allora l'area del primo settore circolare è circa l'81,6% del cerchio dato.

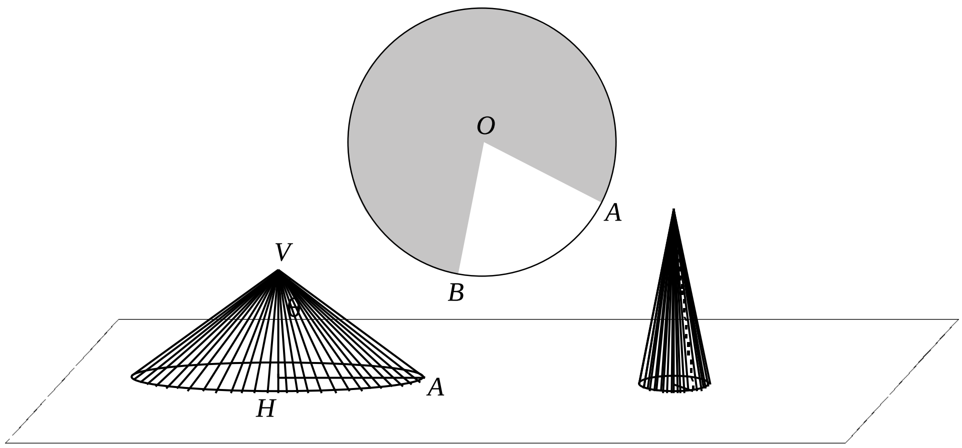

Figura 6. *Cono di volume massimo e angolo di semiapertura.*

Il secondo cono, nel caso in cui il volume del primo sia massimo, ha raggio di base: $r_2 = 1 - \sqrt{2/3}$.

Quindi il volume del secondo cono, in tali ipotesi, è:

$$V_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{2/3}\right)^2 \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{2/3}\right)^2}.$$

b. La capacità complessiva dei due coni espressa in litri, nel caso in cui il volume di uno dei due coni sia massimo, è:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi\left(1 - \sqrt{2/3}\right)^2 \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \approx 437,7.$$

c. Considerando il triangolo HAV (fig. 6) possiamo determinare l'angolo θ di semiapertura del cono di volume massimo, risolvendo l'equazione:

$$sen\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

nell'intervallo [0, 1]. Si trova l'angolo:

$$\theta = arcsen\sqrt{2/3} \approx 0.955 \quad = (54,7356 \quad)°.$$

Per determinare tale angolo non ci sarebbe bisogno di un metodo numerico, in quanto serve soltanto una calcolatrice scientifica con la funzione *arcsenx*. Volendo tuttavia usare un metodo numerico, come era richiesto dal testo, si può risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = senx \\ y = \sqrt{2/3} \end{cases}$$

oppure determinare la minima radice positiva della funzione

$$g(x) = senx - \sqrt{2/3}.$$

Per determinare un valore approssimato della radice, si può applicare ad esempio il metodo di bisezione.

Risposte ai quesiti del Questionario

QUESITO 1. Dati due numeri positivi a e b, la loro media aritmetica è ovviamente $m_a = (a + b)/2$ e la media geometrica: $m_g = \sqrt{ab}$. Si ha $m_a \geq m_g$ e l'uguaglianza si verifica se $a = b$. La dimostrazione è facile perché la disuguaglianza: $\left(a + b\right)/2 \geq \sqrt{ab}$ equivale a: $(a - b)^2 \geq 0$. Della disuguaglianza si poteva anche dare una bella illustrazione geometrica, che risale a Pappo di Alessandria (si veda F. Conti, *Dimostrazioni senza parole*, in «Archimede», n. 2/2001, p. 108).

La generalizzazione della definizione di media aritmetica di n numeri a_1, $a_2, \dots, a_n$ è $m_a = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$ e quella di media geometrica è $m_g = \sqrt[n]{a_1 \, a_2 \cdots a_n}$ (in quest'ultimo caso serve la limitazione che i numeri siano positivi).

QUESITO 2. Chiamiamo E_1 l'evento «uscita di almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado».

Conviene pensare all'evento contrario, che ha probabilità:

$$p\left(\overline{E_1}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}.$$

Quindi

$$p\left(E_1\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0.5177$$

Nello stesso modo si procede per l'evento E_2, «uscita di un doppio 1 con 24 lanci di due dadi».

Calcoliamo inizialmente la probabilità dell'evento contrario:

$$p\left(\overline{E_2}\right) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.508596$$

Quindi

$$p\left(E_2\right) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914$$

Si conclude, come aveva trovato Pascal (1623-1662), che è più probabile l'evento E_1. Una valutazione molto grossolana porterebbe alla conclusione erronea che le due probabilità siano uguali, perché nel primo caso ripetiamo 4 volte un evento che si verifica in media 1 volta su 6, nel secondo caso ripetiamo 24 volte un evento che si verifica in media 1 volta su 36 (e $4 : 6 = 24 : 36$).

QUESITO 3. La probabilità che tutte le partite inserite nella schedina del *Totocalcio*, eccettuata una, terminino in parità, è:

$$p\left(E\right) = 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{26}{1594323} = 0,0000163$$

QUESITO 4. Si può partire dalle seguenti disuguaglianze (n naturale positivo):

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{3}{n-1}\right) \cdot \frac{3}{n} \le \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{n}.$$

L'ultima disuguaglianza si ricava dall'osservazione che il prodotto contenuto nelle parentesi è minore di 1. Quindi si conclude che:

$$0 < \frac{3^n}{n!} \leq \frac{9}{2}\,\frac{3}{n}.$$

Dal teorema del confronto sui limiti, segue: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

QUESITO 5. Sia $f(x)$ una funzione definita in un certo insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia T un numero reale positivo per cui si verifica la seguente proprietà: se $x \in D$, allora $x + T \in D$ e inoltre $f(x) = f(x + T)$ per ogni $x \in D$. In queste ipotesi, la funzione si dice *periodica* e il minimo numero reale positivo T, se esiste, per cui si verifica la proprietà citata è chiamato *periodo* di $f(x)$. Occorre aggiungere «se esiste» perché ci sono funzioni periodiche che non hanno un periodo minimo, ad esempio una funzione costante su $\mathbb{R}$.

Le due funzioni rientrano tra quelle armoniche del tipo $f(x) = a\sin\omega x$, che hanno per periodo $T = 2\pi/\omega$. Quindi il periodo delle funzioni date è $T_1 = 6$ e $T_2 = \pi$.

QUESITO 6. La funzione data, $f(x) = x^n + px + q$, è ovviamente continua e derivabile ovunque.

Sia n pari e supponiamo per assurdo che esistano tre punti $a < b < c$ per cui $f(a) = f(b) = f(c)$. Allora, per il teorema di Rolle, esisterebbero i punti $m \in]a, b[$ e $n \in]b, c[$ tali che $f'(m) = f'(n) = 0$. Ma questo è assurdo perché la derivata prima $f'(x) = nx^{n-1} + p$, che è un binomio di grado dispari, avrebbe due radici reali e distinte.

Se n è dispari, allora la derivata prima $f'(x) = nx^{n-1} + p$ è un polinomio di grado pari, che ammette al più due zeri. Quindi $f(x)$ ha al più due punti con retta tangente parallela all'asse x. Ne segue, in modo analogo al precedente caso, che $f(x)$ ha al più tre radici reali.

Si osservi, come esempio significativo, che la funzione del tipo $f(x) = x^n - x$, per ogni n, possiede il numero massimo di soluzioni previsto dall'enunciato.

QUESITO 7. Nella funzione $f(x) = e^x - \operatorname{sen}x - 3x$ è presente il termine «oscillante» $\operatorname{sen}x$; per calcolare il limite non possiamo usare il teorema della somma dei limiti. Sia per $+\infty$ che per $-\infty$ conviene dunque scrivere nel seguente modo:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(e^x - senx - 3x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{senx}{x} - 3\right)\right] = +\infty.$$

La conclusione si ricava dall'analisi dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{e da} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{senx}{x} = 0.$$

Il primo limite si calcola usando la regola di De L'Hospital mentre il secondo richiede un'analisi più attenta. Si osserva che, per $x > 0$, vale la seguente relazione $-\frac{1}{x} \le \frac{senx}{x} \le \frac{1}{x}$ e si applica il teorema del confronto per i limiti. Un'analoga discussione per $x \to -\infty$, porta a concludere che:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x - senx - 3x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{senx}{x} - 3\right)\right] = +\infty$$

Dimostriamo che la funzione $f(x) = e^x - \mathrm{sen}x - 3x$ ammette una ed una sola radice positiva compresa tra 0 e 1. La funzione data è continua sulla retta reale e dunque anche in [0, 1]. Negli estremi assume valori di segno opposto: $f(0) = 1$ e $f(1) = e - \mathrm{sen}1 - 3 < 0$. Poiché inoltre, con $0 < x < 1$, $f'(x) = e^x - \cos x > 0$, allora $f(x)$ è crescente in [0, 1]. Applicando uno dei metodi approssimati, ad esempio il metodo delle tangenti di Newton, si trova la radice approssimata $\alpha = 0{,}36\ldots$

QUESITO 8. La funzione è definita per $x > 0$. Si ha: $f'(x) = 3 + 1/x$ che è quindi positiva. Pertanto $f(x)$ è crescente («in senso stretto») e dunque è invertibile, con funzione inversa derivabile. Per il teorema sulla derivata della funzione inversa, nell'ipotesi in cui $y_0 = f(x_0)$, si ha che:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Quindi $g'(3) = \frac{1}{f'(x_0)}$, con $f(x_0) = 3$. Per determinare x_0, dobbiamo risolvere l'equazione $3x + \ln x = 3$, ovvero $\ln x = 3 - 3x$; si trova immediatamente che $x_0 = 1$. Si conclude che $g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$.

QUESITO 9. Chiamiamo $F(x)$ la funzione data (è una funzione integrale):

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = x\cos\pi x .$$

Per il «teorema fondamentale del calcolo integrale», si ha: $F'(x) = f(x) = \cos\pi x - \pi x\,\mathrm{sen}\pi x$.

Quindi $f(4) = \cos 4\pi - 4\pi\,\mathrm{sen}4\pi = 1$.

QUESITO 10. Si rinvia a un buon libro di geometria. Qui ci limitiamo a ricordare che le similitudini si possono tutte ottenere come composizione di un'omotetia con un'isometria. Quindi le omotetie sono delle particolari similitudini. In termini intuitivi, le similitudini (e quindi anche le omotetie) conservano la «forma» delle figure, ma le omotetie conservano anche le «direzioni».

Osservazioni e commenti sul tema

Il tema assegnato si presenta con la stessa struttura introdotta per la prima volta lo scorso anno e comprende 2 problemi e un questionario con 10 quesiti (si veda l'articolo di G. Anichini, L. Ciarrapico in «Archimede», n. 2/2001, p. 61-70).

Il primo problema ha creato negli allievi una piccola difficoltà iniziale di interpretazione del testo. All'inizio si doveva scegliere se scrivere il rapporto tra i due numeri nella forma $x/y = a$ o, all'inverso, come $y/x = a$. Quelli che hanno scelto la seconda alternativa hanno successivamente trovato incomprensibile l'ultima domanda (la 5), che, peraltro, così come è formulata, è apparsa poco chiara a tutti, perché richiedeva di ricordare la definizione di *rapporto aureo* e di riconoscere l'equazione di secondo grado che lo genera. Anche la richiesta di calcolare l'area tra le due curve con un metodo approssimato poteva essere più interessante se fosse stata proposta come una forma di controllo del risultato ottenuto in precedenza con il calcolo integrale.

Il secondo problema è piuttosto tradizionale e apparentemente più semplice del primo. Il primo contiene un facile sistema algebrico, uno studio di funzione, un integrale e un metodo numerico per il calcolo dell'integrale e si presenta come una serie di domande in cui prevale l'aspetto esecutivo più che l'intuizione e l'originalità. Il secondo contiene sostanzialmente un problema di massimo, ma soprattutto richiede la conoscenza di un po' di geometria solida, se non altro per iniziare. Questo ha portato la maggior parte degli studenti a scegliere il primo problema. Le domande b) e c) del secondo problema, inoltre, appaiono un po' deludenti: nella b) veniva richiesto il calcolo del volume dei due coni espresso in litri e nella c) si chiedeva di determinare, con un metodo numerico, un angolo $\left(\theta = arcsen\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ che si poteva benissimo calcolare con una normale calcolatrice scientifica.

Si tenga presente che i due problemi devono essere «pesati» in modo uguale dalle commissioni – così come i quesiti del questionario – assegnando lo stesso punteggio, perché la «consegna» della prova richiede la risoluzione di un problema e di 5 quesiti del questionario.

I quesiti del questionario, in confronto ai due problemi, sono apparsi più vivaci e interessanti, perché insistono su argomenti fondamentali di analisi e di calcolo delle probabilità contenuti nei programmi sperimentali del PNI per il liceo scientifico. Alcuni quesiti, tuttavia, erano un po' delicati e «ai confini» del programma. Difficili per quasi tutti gli allievi sono risultati i quesiti 4 e 7 del questionario relativi ai limiti di successione e di funzione. Il quesito 4, seppure intuitivo, non era banale e si riferiva a un argomento che non sempre viene approfondito nel liceo scientifico sperimentale. Il quesito 7 richiedeva una certa attenzione e una buona conoscenza dell'argomento, perché non si prestava ad un uso acritico dei teoremi sulle operazioni con i limiti. Altrettanto impegnativo, se lo si voleva affrontare in modo non soltanto intuitivo, è risultato il quesito 6, che richiedeva un'applicazione del teorema di Rolle. Qualche rilievo ulteriore si potrebbe fare sul quesito n. 10, perché di tipo esclusivamente teorico e quindi non proprio adatto a rilevare la presenza di particolari competenze.

A conclusione di queste note è opportuno richiamare quanto era stato osservato un anno fa relativamente alla nuova struttura della prova scritta di matematica. Si tratta di un tipo di prova che certamente rappresenta un miglioramento rispetto alla vecchia struttura, perché offre agli studenti la possibilità di scegliere tra diversi quesiti e di mettere in luce la loro preparazione su un numero più vasto di argomenti. Nello stesso tempo occorre osservare che rimangono da risolvere alcuni nodi:

– C'è uno sfondo non ben definito, soprattutto nel liceo scientifico non sperimentale, di programmi e curricola, perché non sono precisate a livello nazionale le conoscenze e le competenze obbligatorie da raggiungere, sulle quali costruire la prova d'esame.

– Rimane aperta la questione dell'uso, finora vietato, di calcolatrici programmabili e simbolico-grafiche, in particolare nei licei sperimentali per la matematica (PNI e «Brocca») dove queste competenze sarebbero invece da apprezzare.

– La valutazione della prova dovrebbe essere fatta sulla base di una «griglia» fissata a livello nazionale, per evitare di creare disparità tra le commissioni, precisando non solo il livello di eccellenza (1 problema e 5 quesiti del questionario svolti in modo completo e corretto), ma anche quello di sufficienza o, meglio ancora, fissando i punteggi per ogni problema, per le singole domande dei problemi e per i quesiti del questionario.

Quest'anno, inoltre, la novità della commissione interna, formata da tutti docenti della classe tranne il presidente, ha senz'altro determinato ulteriori distorsioni nella valutazione, perché si tende a valutare – anche all'esame – con un inevitabile «effetto alone», aspettandosi dai propri allievi le stesse valutazioni raggiunte mediamente durante l'anno scolastico. Per questi motivi, e a maggior ragione dopo l'introduzione della commissione interna, sarebbe opportuno stabilire maggiori elementi di oggettività, con un'uniformità dei criteri di valutazione della seconda prova scritta a livello nazionale, adottando una «griglia» unica distribuita a tutte le commissioni, così come avviene in diversi paesi europei.

LUIGI TOMASI
Liceo Scientifico «Galileo Galilei» Adria (Ro) – SSIS di Ferrara
luigitomasi99@tin.it