LE BORSE DI STUDIO INDAM 2013/2014

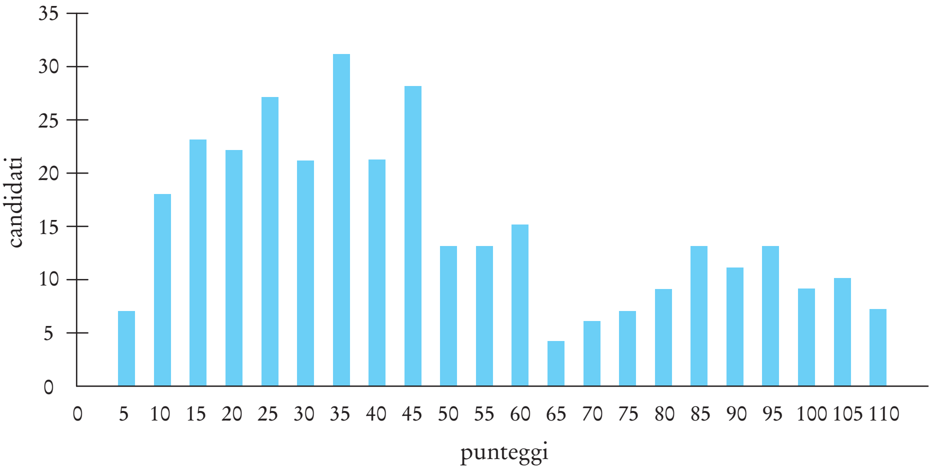
La prova per assegnare le borse di studio bandite dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM), destinate agli studenti che si iscrivono al primo anno dei Corsi di Laurea in Matematica, ha visto nell'a.a. 2013/2014 la partecipazione di 328 giovani aspiranti. Ciò ha significato una decisa riduzione rispetto ai numeri degli scorsi anni, forse ascrivibile al fatto che l'INdAM ha messo in palio solo 20 borse in questa edizione, eliminando anche i premi di 500 euro (non rinnovabili) assegnati gli scorsi anni a chi si classificava nelle prime 40 posizioni alle spalle dei vincitori della borsa vera e propria (il cui ammontare non ha subito variazioni: 4000 euro annui, rinnovabili fino alla laurea).

Oltre agli scriventi, hanno fatto parte della Commissione Giudicatrice Angelo Alvino (nelle vesti di Presidente), Claudio Bernardi, Elisabetta Strickland.

La prova, di struttura simile a quelle degli scorsi anni, consiste in una batteria di 10 quesiti (7 a risposta multipla, 3 a risposta numerica «secca») e 3 problemi dimostrativi, in un tempo di tre ore e mezza.

Ancora una volta, sono emerse forti differenze tra i risultati del Nord e quelli del Sud (in maniera analoga a quanto riscontrato nelle indagini PISA, così come nelle varie edizioni delle Olimpiadi di Matematica). Vi è anche un certo squilibrio di genere nella fascia alta dei punteggi (2 ragazze nei primi 20 classificati, 5 nei primi 40, 9 nei primi 80, 32 nei primi 160, a fronte di una partecipazione sostanzialmente paritaria tra maschi e femmine): un dato anch'esso in linea con i risultati delle Olimpiadi di Matematica (e, in misura minore, con le indagini PISA).

Ben 21 studenti hanno realizzato almeno 100 punti su 110; di questi, 8 hanno svolto la prova in maniera essenzialmente completa e corretta. Il punteggio medio è stato nel complesso di circa 48 punti, con una deviazione standard molto ampia: ben 29 punti in una scala di 110 punti in totale. In effetti, se si cerca di osservare l'andamento complessivo dei punteggi (ad esempio suddividendoli ad intervalli di 5 punti), nasce l'impressione di aver a che fare con due distinte distribuzioni affiancate, ciascuna di aspetto più o meno (vagamente) «gaussiano», ma apparentemente riferite a due popolazioni disgiunte. Il grosso dei partecipanti (circa 240 candidati che hanno realizzato fino a circa 60 punti, con valore modale attorno ai 35), ed una minoranza di reali aspiranti alla borsa di studio (circa 90 candidati oltre i 60 punti, con valore modale attorno ai 90). In pochi hanno realizzato tra i 60 e i 70 punti. Una tale peculiarità può essere spiegata sia grazie ad alcuni tratti della prova proposta (è possibile vi sia stata una concentrazione di vari quesiti attestati su livelli di difficoltà tra loro vicini, il che può aver dato luogo ad un parziale effetto *booleano* tra chi era in grado di affrontarli e chi no) sia sulla base dei percorsi dei candidati.



Non è difficile verificare che gran parte dei 90 studenti che si sono realmente contesi la vincita della borsa avevano in passato partecipato con buon successo alle Olimpiadi di Matematica, con esperienze significative in gare individuali e a squadre, seguendo stage e corsi di preparazione vari: un percorso decisivo ai fini dell'acquisizione dei principali elementi della matematica di base, vagliata da una prova come questa. La filiera legata all'organizzazione delle Olimpiadi che fa capo all'Unione Matematica Italiana è di fatto la sola che possa garantire al nostro Paese, oltre ad una generica promozione della matematica, ogni anno una coorte stimabile attorno ai 100 giovani in possesso di una conoscenza sicura ed accurata della matematica di base. Si tratta al momento del principale, se non unico, canale di eccellenza per la matematica, diffuso nelle nostre scuole in maniera più o meno capillare.

Per quanto riguarda i quesiti proposti, i più difficili sono risultati, con buon margine, il n. 7 (geometrico con aspetti algebrico-aritmetici) tra quelli a risposta multipla e il n. 10 a risposta numerica (geometrico con problema di massimo), entrambi risolti da poco più di 1/10 dei candidati. Impegnativo anche il n. 5 (cammino minimo sulla superficie di un cono), risolto da circa 1/4 dei partecipanti. Interessante notare, tuttavia, che tali quesiti, risultati quelli con il minor numero di risposte esatte, non sono stati percepiti come i più difficili tra chi ha svolto la prova: sia nel quesito n. 7 sia nel n. 5 le risposte in bianco sono state circa 1/4, una percentuale molto minore di quanto accaduto nel n. 1 (circa 1/3 le risposte in bianco così come quelle corrette e quelle sbagliate) e nel n. 3 (circa il 40% le risposte in bianco, ma con il triplo delle risposte corrette avute nel n. 7). Il più semplice è stato invece senza dubbio il n. 2 (negazione di una proposizione con quantificatori), con quasi il 90% di risposte esatte.

Tra i problemi, invece, quello con risultati migliori è stato il n. 2 (punteggio medio 9,7 su 20), seguito dal n. 1 (punteggio medio 8 su 20) e dal n. 3 (punteggio medio 5,7 su 20).

004ARCH2_14_Francini_Mortola_INDAM.indd 76 03/06/14 14:29

Gli autori vogliono esprimere un particolare ringraziamento a Cinzia Belmonte, Tania Fantozzi, Alessandro Iannucci, che, oltre ad aver coordinato le operazioni di correzione degli elaborati, hanno provveduto a raccogliere approfonditi dati statistici circa i risultati della prova, formulando articolati commenti in merito agli svolgimenti.

1. IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema allegato nell'apposito foglio. È ammesso l'uso della riga e del compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza.**

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 *a* 7*, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:*

- 0 *punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);*
- 1,5 *punti in caso di risposta mancante;*
- 5 *punti in caso di risposta esatta.*

1. Un biliardo ha la forma di triangolo equilatero, il cui lato ha lunghezza ℓ. Indicati con A, B, C i tre vertici, sia D il punto del lato AB tale che il segmento BD abbia lunghezza $\ell/3$. Un giocatore indirizza una biglia posta in A verso un punto E del lato BC. La biglia dopo il rimbalzo va a colpire il lato AB in D. Quanto misura il segmento BE?

(A) $\ell/6$ (B) $\ell/5$ (C) $\ell/2$
(D) $\sqrt{3}\,\ell/6$ (E) $\ell/4$

2. L'affermazione «*nello scorso campionato tutti i centravanti hanno segnato almeno 4 gol*» è falsa. Questo significa che, nello scorso campionato,

(A) tutti i centravanti hanno segnato meno di 4 gol
(B) almeno un centravanti ha segnato meno di 4 gol
(C) almeno un centravanti ha segnato più di 4 gol
(D) tutti i centravanti hanno segnato più di 4 gol
(E) almeno un centravanti ha segnato almeno 4 gol

3. Si sa che l'equazione $x^3 + ax^2 + bx = 1$, nell'incognita x, ammette tre soluzioni reali, una delle quali è diversa da 1 ed è uguale al prodotto delle altre due. Se ne può dedurre che

(A) $a + b = -2$ (B) $a = b$ (C) $a = 0$
(D) $ab = 1$ (E) $a - b = 2$

4. In un riferimento cartesiano, la regione $\mathcal{R}$ è formata dai punti P tali che la somma della distanza di P dall'asse x e della distanza di P dall'asse y non supera 6. Qual è l'area di $\mathcal{R}$?

(A) 60 (B) 72 (C) 48
(D) 36 (E) 96

5. Una formica si trova in un punto P della circonferenza alla base di un cono. Si sa che la superficie laterale del cono ha area tripla della superficie della base e che il diametro della base è di 8 cm. Quanti centimetri misura il cammino più breve che permette alla formica di raggiungere il punto della base diametralmente opposto a P, rimanendo sempre sulla superficie laterale del cono?

(A) $6\sqrt{3}$ (B) 4π (C) $9\sqrt{2}$
(D) $12\sqrt{3}$ (E) 12

6. In un certo paese, i commercianti pagano una tassa del 23% (del prezzo di vendita) su ciascun prodotto venduto. Un giorno la tassa viene portata al 30%. Un commerciante decide allora di aumentare i prezzi dei prodotti, in modo da mantenere per ogni prodotto, al netto delle tasse, lo stesso ricavo che aveva in precedenza. Di che percentuale deve aumentare i prezzi di vendita?

(A) del 7% (B) dell'8% (C) del 9%
(D) del 10% (E) del 14%

7. Si consideri, in un riferimento cartesiano, una circonferenza il cui centro ha coordinate irrazionali. Quanti possono essere, al massimo, i punti con entrambe le coordinate razionali appartenenti alla circonferenza?

(A) nessuno (B) 1 (C) 2
(D) 4 (E) infiniti

B) QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 *punti per ogni risposta errata;*
- 0 *punti per ogni risposta non data;*
- 5 *punti per ogni risposta esatta.*

8. Dopo aver trovato tutti gli interi positivi m tali che $\dfrac{2m+12}{m+1}$ è intero, indicare la somma di tali m.

9. Indicare quanti sono i numeri primi il cui cubo è un divisore del numero $70! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 68 \cdot 69 \cdot 70$. [Si ricorda che 1 non è un numero primo.]

10. Due delle mediane di un triangolo misurano, rispettivamente, 20 e 21 cm. Quanto può essere, al massimo, l'area del triangolo (in cm^2)?

C) PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, motivando adeguatamente tutte le risposte. Una proposizione che sia contenuta nel testo di un problema, di cui sia richiesta la dimostrazione, può essere utilizzata per affrontare le parti successive del problema stesso, anche qualora non sia stata svolta la dimostrazione richiesta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 *a* 20.

1. Sia γ una circonferenza di centro C e sia P un punto esterno a γ. Si traccino le rette tangenti a γ passanti per P, le quali toccano γ nei punti A e B.

(A) Posto $A\hat{P}B = \delta$, qual è l'ampiezza dell'angolo $A\hat{D}B$ (dove D è il punto d'intersezione tra γ e il segmento CP)?
(B) Dimostrare che il quadrilatero $PACB$ è sia inscrivibile che circoscrivibile ad una circonferenza.
(C) Supponendo che $CB = 6$ e $AP = 8$, stabilire le misure dei raggi della circonferenza inscritta e di quella circoscritta al quadrilatero $PACB$.
(D) Nelle stesse ipotesi della parte (c), determinare la distanza tra i centri delle due circonferenze (quella inscritta e quella circoscritta a $PACB$).

2. Per ogni intero positivo n, indichiamo con d_n il numero dei suoi divisori dispari e con p_n il numero dei suoi divisori pari. Per esempio, i divisori pari di 6 sono 2 e 6 (dunque $p_6 = 2$) e i divisori dispari di 6 sono 1 e 3 (dunque $d_6 = 2$).

(A) Dare un esempio di un numero k per cui $d_k < p_k$ ed un esempio di un numero m per cui $d_m > p_m$.
(B) Si considerino i numeri per cui $d_n > p_n$. Per questi numeri, quali valori può assumere p_n?
(C) Caratterizzare i numeri per cui $p_n = d_n$.
(D) Dimostrare che p_n è divisibile per d_n, qualunque sia n. [Si tenga presente che il numero 0 è divisibile per qualsiasi numero intero.]

3. Dato un intero positivo n, indicheremo con X_n l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ dei primi n numeri naturali positivi e con Y_n l'insieme $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ dei primi n

numeri naturali dispari. Inoltre, se A è un qualsiasi insieme finito di numeri, indicheremo con $s(A)$ la somma degli elementi di A.

(A) Dimostrare che, per ogni intero positivo n, si ha $s(X_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $s(Y_n) = n^2$.

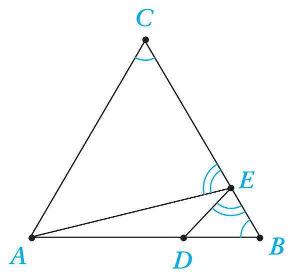
(B) Determinare l'insieme di tutti i possibili valori $s(H)$, al variare di H tra i sottoinsiemi non vuoti di X_n.

(C) Determinare l'insieme di tutti i possibili valori $s(K)$, al variare di K tra i sottoinsiemi non vuoti di Y_n.

2. SOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

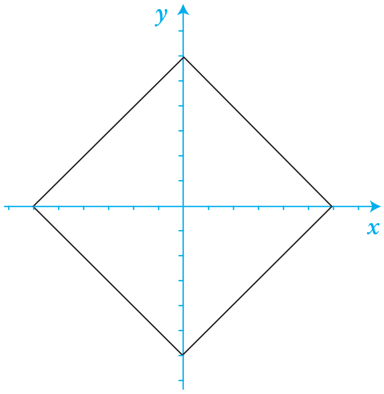
1. Risposta: E.
Per la legge della riflessione, gli angoli $A\hat{E}C$ e $D\hat{E}B$ sono congruenti. Inoltre $A\hat{C}E = D\hat{B}E = 60°$. Perciò i triangoli CAE e BDE sono simili e vale dunque la proporzione $\frac{BE}{CE} = \frac{BD}{CA}$. Posto $x = BE$ si ha quindi $\frac{x}{\ell - x} = \frac{\ell/3}{\ell}$, da cui si ricava $x = \ell/4$.



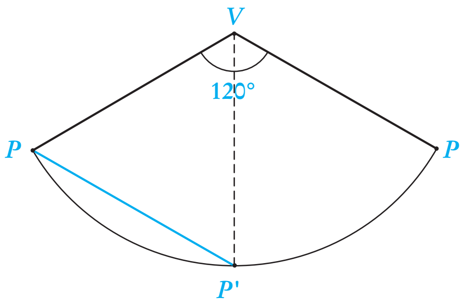
2. Risposta: B.
Negare un'affermazione del tipo: «tutti soddisfano la proprietà $\mathcal{P}$» equivale a dire che «almeno uno non soddisfa la proprietà $\mathcal{P}$», per cui la risposta (B) è quella corretta.

3. Risposta: E.
Le soluzioni dell'equazione considerata sono le radici del polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$. Dette α, β e $\gamma = \alpha\beta$ tali radici, dal momento che deve essere $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, si ha che $\alpha\beta\gamma = \gamma^2 = 1$. Ciò implica che $\gamma = -1$, dato che per ipotesi $\gamma \neq 1$. Pertanto $p(-1) = 0$, da cui, sostituendo nell'espressione di $p(x)$, si ricava che $a - b = 2$.
Non è difficile, con opportuni esempi, vedere che le uguaglianze riportate nelle altre risposte sono invece tutte falsificabili.

4. Risposta: B.
Consideriamo i punti della regione $\mathcal{R}$ appartenenti al primo quadrante, cioè i punti (x, y) che soddisfano le tre diseguaglianze $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$. Essi formano un triangolo rettangolo isoscele $\mathcal{T}$ con cateti di lunghezza 6 e quindi di area pari a 18. La regione $\mathcal{R}$ è formata dall'unione di 4 triangoli congruenti a $\mathcal{T}$, uno per ogni quadrante, dunque essa ha area 72.



5. Risposta: E.
L'area della base del cono vale, in cm^2, $A = 16\pi$ e l'area della superficie laterale del cono, sempre in cm^2, vale 48π. Per determinare il percorso minimo della formica conviene sviluppare la superficie del cono tagliandola lungo la generatrice passante per la posizione iniziale P della formica. Otteniamo in tal modo un settore circolare di vertice V, di area 48π e avente un arco di lunghezza pari alla circonferenza della base del cono, ossia, in cm, 8π.



La lunghezza di VP, che è il raggio del settore circolare ottenuto dallo sviluppo piano della superficie laterale, è quindi $R = \dfrac{2 \cdot 48\pi}{8\pi} = 12$ cm. L'angolo in V del settore circolare ha dunque ampiezza in radianti pari a $8\pi / 12 = \dfrac{2}{3}\pi$, vale a dire 120°. Il triangolo PVP' nello sviluppo piano è pertanto equilatero, quindi il suo lato PP', che corrisponde al cammino minimo cercato, ha la stessa lunghezza di R, ossia 12 cm.

6. Risposta: D.
Se p indica il prezzo iniziale del prodotto e $t = \frac{23}{100}p$ la tassa, significa che il ricavo per ogni pezzo venduto è $r = (77/100)p$. Indichiamo con p' il nuovo prezzo, scelto in modo da assicurare lo stesso ricavo dopo l'aumento delle tasse. Deve dunque valere l'uguaglianza $\frac{70}{100}p' = \frac{77}{100}p$, da cui segue che $p' = \frac{11}{10}p$. Il prezzo deve quindi aumentare del 10%.

7. Risposta: C.
Osserviamo che, se due punti hanno coordinate razionali, il loro asse è una retta la cui equazione ha coefficienti razionali. Pertanto, se tre diversi punti A, B, C appartenenti ad una circonferenza hanno coordinate razionali, anche il centro della circonferenza deve avere coordinate razionali in quanto è l'intersezione di due rette con equazioni aventi coefficienti razionali, vale a dire l'asse di AB e l'asse di BC (la soluzione di un sistema lineare a coefficienti razionali è necessariamente un punto a coordinate razionali). In conclusione, non possono esserci più di due punti a coordinate razionali su una circonferenza il cui centro abbia coordinate irrazionali. Per mostrare che due punti possono in effetti esserci, basta pensare alla circonferenza di centro $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e passante per $(0, 1)$, dunque anche per $(1, 0)$.

B) QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

8. Risposta: 14.
Poiché $\frac{2m+12}{m+1} = \frac{2(m+1)+10}{m+1} = 2 + \frac{10}{m+1}$, tale numero è intero se e solo se $m + 1$ è un divisore di 10. Dovendo m essere un intero positivo, le sole possibilità per $m + 1$ sono dunque $2, 5, 10$, che corrispondono per m ai valori $1, 4, 9$.

9. Risposta: 9.
Affinché, per il numero primo p, accada che $70!$ sia divisibile per p^3, è necessario e sufficiente che, nell'elenco dei numeri interi da 1 a 70, si incontrino almeno 3 diversi multipli di p (il discorso si complicherebbe lievemente se p non fosse primo). Ciò equivale al fatto che $p \leq 70/3$. Tali numeri p sono perciò i seguenti: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

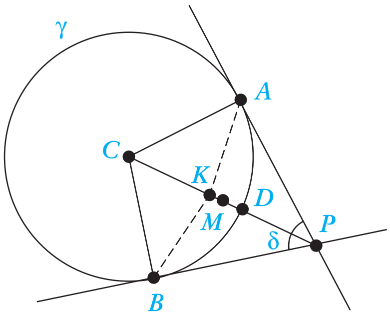
10. Risposta: 280.
Ricordiamo che, per un qualsiasi triangolo ABC, indicato con G il baricentro, i triangoli ABG, BCG, CAG hanno tutti la stessa area (1/3 di ABC). Inoltre, i segmenti AG, BG, CG sono ciascuno i 2/3 della rispettiva mediana. Per quanto sopra, il problema equivale a stabilire l'area massima che può possedere un triangolo ABG con due lati le cui misure (in cm) sono $AG = \frac{2}{3} \cdot 20$ e $BG = \frac{2}{3} \cdot 21$. L'area mas-

sima si ottiene quando AG e BG sono perpendicolari. In tal caso, l'area del triangolo ABC (in cm^2) è $\mathcal{A}_{ABC} = 3\mathcal{A}_{ABG} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 20\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 21\right) \cdot \frac{1}{2} = 280.$

C) PROBLEMI

1.

(A) $A\hat{D}B = 90° + \delta/2$. Infatti l'angolo $A\hat{C}B$ contenente D ha ampiezza di $180° - \delta$, pertanto l'angolo $A\hat{C}B$ non contenente D è di $360° - (180° - \delta) = 180° + \delta$. L'angolo $A\hat{D}B$ è la metà di tale angolo, dato che insiste sullo stesso arco di γ.



(B) Il quadrilatero $PACB$ è inscrivibile poiché $C\hat{A}P + C\hat{B}P = 180°$ ed è circoscrivibile poiché $CA + PB = CB + PA$.

(C) La circonferenza circoscritta a $PACB$ ha centro nel punto medio M di CP, dato che CAP e CBP sono due triangoli rettangoli (M è quindi equidistante da P, A, C, B). Il raggio R di tale circonferenza è dunque pari a $CP/2$, calcolabile con il teorema di Pitagora: $R = \sqrt{6^2 + 8^2}\,/\,2 = 5.$
Il raggio r della circonferenza inscritta in $PACB$ soddisfa la relazione $\mathcal{A} = r \cdot p/2$, dove $\mathcal{A}$ è l'area e p è il perimetro di $PACB$. Perciò $r = (2 \cdot 48)/28 = 24/7$.

(D) Per trovare la distanza tra i due centri, teniamo conto che il centro K del cerchio inscritto appartiene alla diagonale CP (bisettrice dei due angoli $\hat{C}$ e $\hat{P}$) e alle bisettrici uscenti dai vertici A e B, ciascuna delle quali divide il segmento CP in due parti proporzionali ai lati adiacenti (*teorema della bisettrice*). Pertanto $CK = 10 \cdot (6/14) = 30/7$ e dunque $MK = 5 - 30/7 = 5/7$.

2.

(A) Si può prendere, ad esempio, $k = 4$ e $m = 1$; più in generale possiamo considerare come m un qualsiasi numero dispari e come k un numero della forma $2^a \cdot h$, con $a > 1$ e h dispari.

(B) Se n è un intero positivo pari, per ogni divisore dispari d di n, il numero $2d$ è un divisore pari di n; inoltre, al variare di tali d, i valori di $2d$ sono tutti distinti. Perciò, per n pari, non si può avere $d_n > p_n$. L'unica possibilità è che n sia dispari. In tal caso $p_n = 0$, mentre d_n è positivo.

(C) Si tratta dei numeri n del tipo $n = 2h$, con h dispari. Ragionando come prima, si vede infatti che, se n è multiplo di 4, allora $p_n > d_n$: per ogni divisore dispari d ci sono infatti almeno i divisori $2d$ e $4d$, tutti distinti.
Invece, se $n = 2h$ con h dispari, si ha $d_n = p_n$, in quanto la corrispondenza $d \to 2d$ è biunivoca tra i divisori dispari e pari di n.

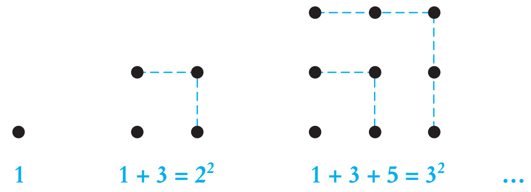
(D) Per ogni intero positivo n, indichiamo con $div(n)$ il numero complessivo dei divisori positivi di n. Se $n = 2^a \cdot h$, con h dispari, si avrà $div(n) = div(2^a) \cdot div(h) =$
$= (a+1) \cdot div(h) = (a+1) \cdot d_n$.
Pertanto si ha: $p_n = div(n) - d_n = (a+1) \cdot d_n - d_n = a \cdot d_n$, ossia p_n è divisibile per d_n.
Nel caso sia $a = 0$, risulta $p_n = 0$, ma la tesi rimane comunque valida.

3.

(A) Si tratta di due identità classiche, riguardanti le somme dei termini di due familiari progressioni aritmetiche, le quali possono essere dimostrate in vari modi, in particolare per induzione.
Nel primo caso abbiamo a che fare con una progressione aritmetica, possiamo ricavare $s(X_n)$ con un doppio conteggio (sommando a due a due i termini della sequenza con i medesimi termini elencati in ordine inverso); si trova:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & n+1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2s(X_n) = (n+1) \cdot n.$$

In alternativa, si può anche procedere per via combinatoria, osservando che $s(X_n)$ deve coincidere con $\binom{n+1}{2}$: dati gli $n+1$ punti distinti $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$, per contare senza ripetizioni quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due, possiamo osservare che da P_1 ne escono n, da P_2 ne escono altri $n-1$ (oltre a P_1P_2, già contato), da P_3 altri $n-2$, e così via fino a P_n, da cui esce un solo segmento ancora non contato; in tutto i segmenti saranno quindi $s(X_n)$, numero che dovrà coincidere con $\binom{n+1}{2}$, dal momento che tali segmenti sono tanti quanti le coppie di punti.
La seconda identità si può vedere geometricamente, disponendo prima 1, poi 3, poi 5, etc., oggetti in modo da ottenere una griglia quadrata avente n oggetti per lato.
È inoltre agevole ricavare l'una dall'altra con semplici manipolazioni.



(B) Si ottiene tutto l'insieme $X_{\frac{n(n+1)}{2}} = \left\{1, 2, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$.

Per dimostrarlo, si può procedere per induzione su n.

Oppure si possono utilizzare ragionamenti simili a quello descritto qui nel seguito. Dato un intero $n > 1$, sia (per assurdo) l'intero a (con $1 < a < \frac{n(n+1)}{2}$) il minimo non ottenibile come somma di elementi distinti di X_n.

Ciò significa che $a - 1$ è ottenibile come somma di elementi di X_n. Ma allora anche a lo è: se infatti 1 non è stato impiegato per realizzare $a - 1$, basta aggiungervi 1; se invece 1 è stato impiegato per $a - 1$, basterà prendere il minimo $m > 1$ che non è stato impiegato, al posto dell'elemento $m - 1$ (tale m deve esistere, altrimenti $a = \frac{n(n+1)}{2}$).

Può essere utile l'osservazione che, eseguendo tutte le possibili somme, senz'altro si otterrà un sottoinsieme S di $X_{\frac{n(n+1)}{2}}$ simmetrico in $X_{\frac{n(n+1)}{2}}$, nel senso che, per ogni $a \in S$ (con $a \neq n$), anche $\frac{n(n+1)}{2} - a \in S$ (basta sommare tutti gli elementi di X_n non impiegati per ottenere a). È quindi sufficiente dimostrare, anche con altri ragionamenti, che S contiene almeno la prima metà degli elementi di $X_{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(C) Si ottiene precisamente l'insieme $X_{n^2} - \{2, n^2 - 2\}$, ossia tutti i numeri interi da 1 a n^2 tranne 2 e $n^2 - 2$.

Si vede subito che 2 non è realizzabile e, per la simmetria sopra descritta (che vale anche in questo caso), neppure $n^2 - 2$.

Per vedere che tutti gli altri sono invece ottenibili si può procedere per induzione (con le dovute attenzioni all'ipotesi induttiva).

L'induzione può essere agevolata dalle considerazioni di simmetria sopra esposte. Per esempio, si può verificare manualmente la tesi fino al caso $n = 4$. Per $n > 4$, si ha $(n-1)^2 - 2 > \frac{n^2}{2}$, quindi l'ipotesi induttiva per il caso $n - 1$, unita alle suddette considerazioni di simmetria, permette di concludere immediatamente.

Paolo Francini
paolo.francini@gmail.com

Stefano Mortola
ste13251@gmail.com