LA PROVA DEL CONCORSO A 50 BORSE DI STUDIO DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Proseguendo una tradizione ([1]) iniziata nel 2000, anche quest'anno l'Istituto Nazionale di Alta Matematica ha bandito 50 borse di studio per gli studenti universitari che si iscrivono al primo anno di un corso di laurea o di diploma in Matematica. L'Istituto ha deciso di assegnare le borse sulla base di una prova scritta che si è svolta il 12 settembre 2001 contemporaneamente in 29 sedi universitarie italiane.

I candidati avevano a disposizione tre ore di tempo per rispondere a 10 quesiti a risposta multipla e per svolgere 3 problemi, cioè scrivere la risoluzione con i relativi ragionamenti.

Ogni quesito a risposta multipla aveva 5 alternative e forniva 5 punti a chi rispondeva esattamente, 1 punto a chi non rispondeva e 0 punti a chi sbagliava la risposta. Ogni problema invece era valutato con un punteggio da 0 a 20. Per assicurare una correzione uniforme, gli elaborati sono stati esaminati nella sede centrale dell'Istituto da un ristretto numero di persone. La correzione dei quesiti risulta sempre essere un semplice atto meccanico e per evitare errori è sufficiente aumentare il numero dei controlli. La valutazione dello svolgimento di un problema, invece, è decisamente più complicata. Quanto vale una mezza dimostrazione? Quanto vale un'affermazione esatta ma non giustificata? Persone diverse assegnano punteggi diversi sebbene le loro motivazioni nascano da pochi principi da tutti condivisi. Per ridurre al minimo questo inconveniente, i correttori sono stati divisi in tre gruppi e ciascun gruppo ha espresso il proprio giudizio sulle soluzioni di un singolo problema. Inoltre le valutazioni si sono basate su criteri discussi ed approvati dall'intera commissione ([2]).

Per quanto riguarda l'esito del concorso, il punteggio massimo ottenuto è stato di 102 punti su 110 disponibili, risultato decisamente apprezzabile se si tiene anche conto del fatto che con 20 punti venivano premiati soltanto gli svolgimenti «quasi perfetti». Prova ne sia che nei problemi sono stati assegnati solo 8 punteggi pieni (4 nel primo e 4 nel secondo problema). Per restare in tema di punteggi pieni, dei 298 candidati soltanto 11 hanno totalizzato 50 punti con i quesiti. Il punteggio medio è stato di poco superiore a 47, di cui 26 punti raccolti nei quesiti, 7,7 nel primo esercizio, 8,7 nel secondo e 4,8 nel terzo.

Nel caso che qualche studente voglia utilizzare il compito qui riportato come test per un futuro analogo concorso, vorrei aggiungere che il punteggio mi-

([1]) Si vedano a tal proposito gli articoli precedentemente pubblicati su «Archimede» e citati in bibliografia.

([2]) La commissione era formata da Vincenzo Ancona, Claudio Bernardi, Paolo Gronchi, Paolo Marcellini, Aldo Morelli, Salvatore Rionero, Gino Roghi.

nimo dei primi 50 classificati è stato di circa 70 punti e che, in media, i punti ottenuti nei problemi non hanno superato quelli ottenuti nei quesiti. Quindi, dovendo necessariamente fare a meno del giudizio della commissione, provate a risolvere i problemi e cercate di guadagnare almeno 35 punti con i quesiti!

1. IL TESTO DELLA PROVA

A. Quesiti a risposta multipla

1. Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte (di cui 10 fiori, 10 picche, 10 cuori e 10 quadri, con 3 figure per ogni seme). Essendo la probabilità di un evento il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero dei casi possibili, qual è la probabilità di estrarre una carta che sia di cuori o una figura?

(A) 22/40
(B) 10/40
(C) 12/40
(D) 19/40
(E) 15/40

2. Qual è il resto della divisione fra i polinomi x^6 ed $x^3 - 1$?

(A) -1
(B) 1
(C) $x^3 + 1$
(D) x^3
(E) $x^2 - 1$

3. Quanto vale la somma dei primi 80 numeri interi positivi: $1 + 2 + 3 + \ldots + 80$?

(A) 3402
(B) 1225
(C) 2820
(D) 6480
(E) 3240

4. Nella popolazione di un paese, dei maschi sono sposati i 2/3 e tutti con femmine del paese; delle femmine sono sposate i 3/5 e tutte con maschi del paese. Qual è la frazione di persone non sposate, maschi o femmine, rispetto all'intera popolazione del paese?

(A) 11/15
(B) 2/15
(C) 5/19
(D) 7/19
(E) i dati sono insufficienti

5. Un elettrodomestico viene pagato 418 euro, dove il prezzo comprende una tassa del 10%. Se invece si applicasse la tassa del 9%, quanto si risparmierebbe?

(A) meno di 3 euro
(B) fra 3 e 4 euro
(C) fra 4 e 5 euro
(D) fra 5 e 6 euro
(E) più di 6 euro

6. Risolvere la disequazione $\log_{10}\left|\log_{10}(x^2 - 3x + 12)\right| \leq 0$.

(A) $x > 0$
(B) $x \geq 1$
(C) $1 \leq x \leq 2$
(D) $1/2 \leq x \leq 1$
(E) la disequazione non ha alcuna soluzione

7. Ci sono 4 fogli di carta. Se ne prendono alcuni (non si sa quanti) e si divide ciascuno di essi in 4 foglietti di carta. Poi si prendono alcuni di questi foglietti e si divide ancora ciascuno in 4 parti. Si prosegue così per un certo numero di volte. Alla fine Andrea dice che ci sono, in tutto, 900 pezzi di carta, mentre Bruno sostiene che i pezzi di carta sono 901.

(A) Andrea ha sicuramente torto mentre Bruno potrebbe aver ragione
(B) Bruno ha sicuramente torto mentre Andrea potrebbe aver ragione
(C) hanno sicuramente torto sia Andrea sia Bruno
(D) almeno uno dei due ha ragione
(E) in linea di principio, entrambi possono avere ragione

8. Qual è il minimo numero di quadrati con area 1 cm^2 sufficienti a coprire una circonferenza di 3 cm di diametro?

Attenzione: si parla di circonferenza e non di cerchio; i quadrati possono anche sovrapporsi.

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

9. Sia BH l'altezza relativa all'ipotenusa AC del triangolo rettangolo ABC e sia P il punto in cui l'asse di AC interseca il cateto maggiore AB. Se D è il punto del segmento CP per il quale si ha $CD = CB$, qual è l'ampiezza dell'angolo HBD?

(A) 30°
(B) 40°
(C) 45°
(D) 60°
(E) nessuno dei valori precedenti

10. Una piramide retta di vertice V ha come base il pentagono regolare $ABCDE$ e le sue facce laterali sono triangoli equilateri. Qual è l'ampiezza dell'angolo AVC?
(A) 60°
(B) 90°
(C) 108°
(D) 120°
(E) non è determinata

B. PROBLEMI

1. Consideriamo una corona circolare con i raggi di lunghezza 4 e 5.
(i) Quali sono i segmenti più lunghi interamente contenuti nella corona circolare?
(ii) Quali sono i triangoli di area massima contenuti nella corona circolare?
(iii) Quanti triangoli di area massima, contenuti nella corona circolare e non sovrapposti, si devono considerare per coprire almeno i 2/5 della corona circolare?

2. *(i)* In quali casi la differenza dei quadrati di due numeri interi positivi è uguale alla somma dei due numeri stessi?
(ii) Trovare tutte le coppie di interi positivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 15.
(iii) Ci sono coppie di interi positivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 30?
(iv) Quali interi positivi possono essere espressi come differenza dei quadrati di due interi positivi?

3. Sono dati i polinomi

$$P(x) = x^{56} - 3x^{55} - 2x^2 + 5x - 1 \qquad \text{e} \qquad Q(x) = x^2 - (a+1)x + a$$

(ove a è un numero reale).
(i) Verificare che P e Q hanno una radice in comune.
(ii) Trovare il resto della divisione di P per Q con $a = 0$.
(iii) Trovare il resto della divisione di P per Q per un qualunque valore di a.

2. SOLUZIONI

A. QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. La risposta esatta è (D). Infatti le cuori sono 10 e le figure sono 12, di cui 3 di cuori. Pertanto le carte favorevoli al verificarsi dell'evento in questione sono 19.

2. La risposta esatta è (B). Basta notare che $x^6 = x^6 - 1 + 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) + 1$.

3. La risposta esatta è (E). Un classico metodo molto semplice per sommare termini consecutivi di una progressione aritmetica è quello di accoppiarli in modo da mantenere costante la somma delle coppie. Così

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 80 = (1 + 80) + (2 + 79) + (3 + 78) + \ldots + (40 + 41) = 81 \times 40 = 3240$$

4. La risposta esatta è (D). Indichiamo con M il numero di maschi del paese e con F il numero di femmine del paese. Sappiamo che il numero di maschi sposati deve essere uguale al numero di femmine sposate e quindi $\frac{2}{3}M = \frac{3}{5}F$., da cui ricaviamo $M = \frac{9}{10}F$.

La frazione cercata è dunque

$$\frac{\frac{1}{3}M + \frac{2}{5}F}{M + F} = \frac{\left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\right)F}{\left(\frac{9}{10} + 1\right)F} = \frac{7}{19}$$

5. La risposta esatta è (B). Indicato con P il prezzo dell'elettrodomestico al netto delle tasse, dalla relazione $P + \frac{10}{100}P = 418$ euro, ricaviamo $P = 380$ euro. Quindi, se si applicasse una tassa del 9%, risparmieremmo un centesimo di P, cioè 3,8 euro. È bene sottolineare che ha sbagliato chi ha risposto un centesimo della somma pagata.

6. La risposta esatta è (C). Il logaritmo di un numero y è minore o uguale di zero se e solo se $0 < y \leq 1$ (indipendentemente dalla base del logaritmo) e dunque risolvere la disequazione di partenza equivale a risolvere

$$-1 \leq \log_{10}(x^2 - 3x + 12) \leq 1, \text{ con la condizione } \log_{10}(x^2 - 3x + 12) \neq 0,$$

cioè

$$\frac{1}{10} \leq x^2 - 3x + 12 \leq 10,, \text{ con la condizione } x^2 - 3x + 12 \neq 1.$$

D'altra parte

$$x^2 - 3x + 12 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \frac{39}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} \geq \frac{39}{4}$$

e quindi possiamo limitarci a risolvere $x^2 - 3x + 12 \leq 10$. Quest'ultima disequazione può essere riscritta in

$$(x-1)(x-2) \leq 0$$

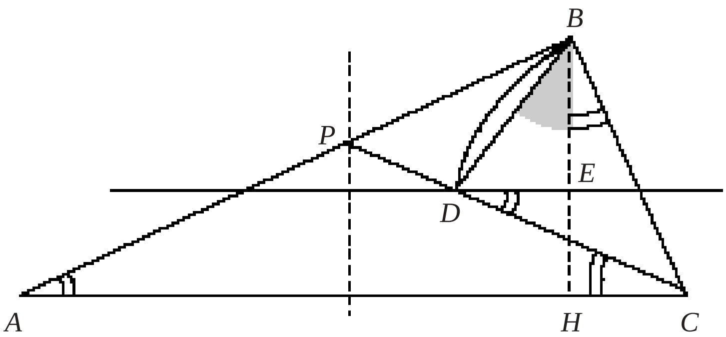
da cui segue la risposta (C).

7. La risposta esatta è (A). Infatti ogni volta che un foglio o foglietto viene diviso in 4 parti il numero totale di pezzi di carta aumenta di 3. Quindi, in qualunque modo si proceda nella scelta dei pezzi da dividere, il numero dei pezzi di carta alla fine sarà della forma $4+3n$, dove n indica il numero di divisioni effettuate. In altre parole il numero finale di pezzi sarà sicuramente un numero che diviso per 3 darà come resto 1 (come 901, per esempio).

8. La risposta esatta è (C). Ogni quadrato può coprire un arco di circonferenza tale che la distanza tra i suoi due estremi sia minore o uguale alla lunghezza della diagonale del quadrato, cioè a $\sqrt{2}$ cm. Dividendo la circonferenza in sei archi uguali si ottengono archi sottesi da corde di lunghezza pari al raggio della circonferenza. Dalla relazione $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ si deduce quindi che sei quadrati non possono essere sufficienti a coprire l'intera circonferenza. Per dimostrare che sette quadrati sono sufficienti basterebbe provare che $\sqrt{2}$ cm è maggiore del lato dell'ettagono regolare inscritto nel cerchio in questione. Ma quanto è lungo il lato di quell'ettagono? Certo, sarà $3\sin(\pi/7)$, ma confrontare questo numero con $\sqrt{2}$ è un po' complicato. Quindi conviene ragionare in modo diverso. Ogni quadrato può coprire un arco di circonferenza di lunghezza maggiore di $\sqrt{2}$ e dunque è sufficiente provare che $7\sqrt{2} \geq 3\pi$. Quest'ultima disuguaglianza è molto più semplice da verificare; infatti si può scrivere

$$7\sqrt{2} > 7 \cdot 1,4 = 9,8 > 3 \cdot 3,2 > 3\pi.$$

9. La risposta esatta è (C). Con riferimento alla figura, tracciamo la retta per D parallela all'ipotenusa ed indichiamo con E la sua intersezione con l'altezza BH. Adesso notiamo che gli angoli BAC e CBH sono uguali perché complementari all'angolo BCA. Gli angoli PCA e CDE sono uguali perché alterni interni. Infine gli angoli PAC e PCA sono uguali dato che P si trova sull'asse del segmento AC. Poiché il triangolo BCD è isoscele, deduciamo che gli angoli HBD e BDE sono uguali. Il triangolo BDE è dunque isoscele e, per costruzione, rettangolo. Ne segue $HBD = 45°$.

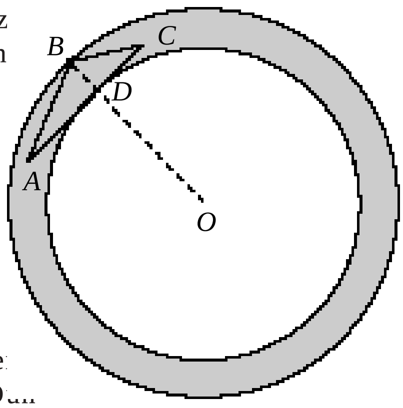


10. La risposta esatta è (C). I triangoli AVC e ABC sono uguali perché hanno lati uguali. Dunque l'angolo AVC ha ampiezza pari a quella dell'angolo interno di un pentagono regolare, cioè $3 \cdot 180°/5 = 108°$.

B. PROBLEMI

1. *(i)* I segmenti più lunghi sono quelli di lunghezza 6 che sono tangenti alla circonferenza interna nel loro punto medio e che quindi hanno i loro estremi sulla circonferenza esterna. Proviamo a dimostrarlo. Gli estremi di un segmento di lunghezza massima dovranno necessariamente trovarsi sul bordo della corona circolare, altrimenti possono ovviamente essere allungati. Se i due estremi si trovano entrambi sulla circonferenza esterna è semplice concludere che la lunghezza del segmento è minore o uguale a 6 e che l'uguaglianza si ha proprio quando il segmento è tangente alla circonferenza interna. Se uno dei due estremi è invece contenuto nella circonferenza interna allora si vede chiaramente che la lunghezza del segmento è minore o uguale a 3.

(ii) I triangoli di area massima sono i triangoli isosceli aventi per base un segmento di lunghezza massima e relativa altezza di lunghezza 1. Un modo di ragionare può essere il seguente. Preso comunque un triangolo ABC nella corona circolare ed indicato con O il centro della corona, a meno di rinominare i punti, si può supporre che la semiretta r uscente da O e passante per B intersechi il segmento AC in un punto D. Ne segue che l'altezza BH del triangolo ABC relativa al lato AC, essendo la distanza del punto B dalla retta passante per AC, ha lunghezza minore del segmento BD. Dunque $BH \leq 1$. Siccome il lato AC ha lunghezza inferiore a 6 (per il punto *(i)*), l'area del triangolo ABC è certamente inferiore a 3.



Quindi ogni triangolo ha area minore o uguale a 3 e l'uguaglianza si ha se e solo se un lato ha lunghezza massima e la relativa altezza ha lunghezza 1.

(iii) La risposta esatta è 4. L'area della corona è 9π e tre triangoli di area massima coprono un'area pari a 9. Chiaramente $9/9\pi = 1/\pi < 1/3 < 2/5$. Quattro triangoli invece coprono un'area pari a 12 ed in questo caso possiamo scrivere

$$\frac{12}{9\pi} = \frac{4}{3\pi} > \frac{4}{9,6} > \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Infine è semplice dimostrare che quattro triangoli di area massima possono essere disposti all'interno della corona circolare in modo da non sovrapporsi. È sufficiente costruire un quadrato circoscritto alla circonferenza interna e notare che i vertici di tale quadrato sono esterni alla corona circolare, dato che $4\sqrt{2} > 5$.

2. *(i)* Si tratta di trovare tutte le soluzioni intere e positive di

$$(a-b)\,(a+b) = a+b.$$

Siccome a e b sono positivi, è lecito dividere per $a + b$ e quindi la differenza dei quadrati di due numeri interi positivi è uguale alla loro somma se e solo se i due numeri sono consecutivi.

(ii) Cerchiamo le soluzioni intere e positive di

$$(a-b)\,(a+b) = 3 \cdot 5.$$

Trattandosi di interi positivi ed essendo $a - b$ minore di $a + b$, restano due sole possibilità: o

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=15 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases}.$$

Da questi sistemi si trovano le uniche due coppie di interi positivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 15. Le due coppie sono (1; 4), (7; 8).

(iii) Come per la domanda precedente, possiamo cercare le soluzioni intere e positive di

$$(a-b)\,(a+b) = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

In questo caso le possibilità (e quindi i sistemi da considerare) sono quattro, ma nessuno di essi ammette soluzioni intere. Infatti otterremo sistemi del tipo

$$\begin{cases} a-b=p \\ a+b=q \end{cases}$$

con p e q di diversa parità (cioè uno pari e l'altro dispari), mentre è chiaro che $a - b$ e $a + b$ devono avere la stessa parità se vogliamo rimanere tra gli interi.

Quindi non esistono coppie di interi positivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 30.

(iv) Abbiamo appena visto che se un intero è pari ma non può essere il prodotto di due numeri pari, cioè non è divisibile per 4, allora non è sicuramente esprimibile come differenza dei quadrati di due interi. D'altra parte se un intero positivo m è un multiplo di 4 allora esiste un intero positivo n tale che

$$m = 4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$$

e quindi m è esprimibile come differenza di due quadrati (purché n sia maggiore di 1, cioè m maggiore di 4). Analogamente, se un intero positivo m è dispari allora esiste un intero positivo n tale che

$$m = 2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$$

e quindi m è esprimibile come differenza di due quadrati, purché m sia maggiore di 1.

In conclusione un intero positivo è uguale alla differenza dei quadrati di due interi positivi se e solo se è dispari maggiore di 1 oppure è un multiplo di 4 maggiore di 4.

3. *(i)* Il polinomio $Q(x)$ ha radici $x = 1$ ed $x = a$; siccome $P(1) = 0$, $x = 1$ è una radice comune.

(ii) Nel caso $a = 0$, si ha $Q(x) = x^2 - x$. Indichiamo con $A(x)$ il quoziente e con $R(x)$ il resto della divisione. Si ha

$$P(x) = A(x)\,Q(x) + R(x), \tag{$\bullet$}$$

con $R(x)$ polinomio di grado minore o uguale a 1. Sostituendo $x = 1$, si deduce che $R(1) = 0$ e dunque $R(x)$ è della forma

$$R(x) = b\,(x-1).$$

Sostituendo $x = 0$ nella (•) si ottiene $P(0) = R(0)$, cioè $-1 = -b$. Quindi il resto della divisione è $x - 1$.

(iii) Nel caso generale, si può procedere come in precedenza scrivendo la (•) e sostituendo $x = 1$, in modo da ottenere $R(x) = b\,(x-1)$. Per determinare b, supposto $a \neq 1$, si sostituisce $x = a$ nella (•) e si ottiene $P(a) = R(a)$, cioè

$$b = (a^{56} - 3a^{55} - 2a^2 + 5a - 1)/(a-1).$$

Effettuando la divisione (bastano i primi tre passi per capire come è fatto il quoziente) si giunge alla scrittura

$$b = a^{55} - 2a^{54} - 2a^{53} - 2a^{52} - \ldots - 2a^3 - 2a^2 - 4a + 1.$$

Nel caso particolare $a = 1$, basandosi su quanto già visto, possiamo scrivere

$$(x-1)(x^{55} - 2x^{54} - 2x^{53} - 2x^{52} - \ldots - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1) = A(x)(x-1)^2 + b(x-1),$$

da cui si ricava

$$x^{55} - 2x^{54} - 2x^{53} - 2x^{52} - \ldots - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = A(x)(x-1) + b.$$

Sostituendo $x = 1$ si ottiene $b = -108$.

PAOLO GRONCHI
Istituto di Analisi Globale ed Applicazioni
CNR – Firenze
paolo@iaga.fi.cnr.it

BIBLIOGRAFIA

A. FIGÀ-TALAMANCAX, *Borse di studio per le matricole di Matematica: una novità di questo anno accademico*, in «Archimede», 1/2001, pp. 5-7.

R. TORTORA, *La prova del concorso a borse di studio dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica*, in «Archimede», 1/2001, pp. 8-20.