LA PROVA PER LE BORSE DI STUDIO INDAM DEL 2002

4000 EURO PER I MIGLIORI STUDENTI DI MATEMATICA

Per il terzo anno consecutivo, l'INdAM ha bandito il concorso per assegnare 50 borse di studio agli studenti che si iscrivono al corso di laurea in Matematica. Ogni borsa ha il valore di 4000 euro ed è rinnovabile, verificandosi alcune condizioni di merito, per ogni anno del corso di laurea; il minimo punteggio per ottenere la borsa è stato di 68 su 110.

Le modalità di organizzazione e di svolgimento sono rimaste quelle degli anni precedenti. Le prove si sono svolte nelle 30 sedi universitarie che hanno aderito all'iniziativa, a cura di due docenti della sede stessa; la correzione, la valutazione e la compilazione della graduatoria, per la quale si è tenuto conto soltanto del punteggio realizzato nella prova, sono avvenute nella sede dell'INdAM a cura della Commissione, costituita dai professori S. Rionero (presidente), C. Bernardi, P. Francini, P. Gronchi, P. Marcellini, A. Morelli.

La prova è consistita nella compilazione, nel tempo di 3 ore, di un *questionario*, nel quale erano presentati 10 quesiti, ognuno con 5 risposte di cui una e una sola esatta, e nella soluzione di 3 *problemi*, articolati in varie domande di difficoltà crescente. Per il questionario, per ogni quesito sono stati assegnati 0 punti nel caso in cui è stata indicata una risposta errata, 1 punto se non si è indicata nessuna risposta, 5 punti se è stata indicata la risposta esatta. Per ogni problema sono stati assegnati al massimo 20 punti, con dei punteggi parziali stabiliti per ogni domanda del problema stesso.

Si nota innanzitutto che l'iniziativa ha riscosso un lusinghiero successo, per cui si auspica che essa si ripeta nei prossimi anni: i giovani che hanno partecipato alla prova hanno manifestato molto interesse e certamente hanno fatto un'esperienza positiva (anche quando si sono resi conto della loro scarsa preparazione matematica). I docenti di scuola secondaria e universitari, particolarmente quelli non di matematica, hanno manifestato un deciso apprezzamento, addirittura meravigliati che un Istituto di ricerca si occupi in modo così incisivo del problema dell'avvio agli studi dei giovani.

I giovani che hanno partecipato (349) in alcune sedi non sono stati tanti quanti si poteva aspettare, considerando il numero di quelli che si iscrivono al corso di laurea

Gli articoli pubblicati su «Archimede» riguardanti le gare del 2000 e del 2001, rispettivamente dei Proff. R. Tortora e P. Gronchi, si trovano nei numeri 1/2001, gennaio-marzo 2001 e 1/2002, gennaio-marzo2002 ed anche nel sito: www. Lemonnier.it, voce «riviste» e poi «Archimede».

I testi con le soluzioni delle gare passate si trovano anche sul sito dell'Indam: http://indam1.mat.uniroma1.it; su questo si troveranno informazioni sui bandi futuri.

in Matematica, e forse non sono sempre stati i più bravi. Probabilmente ha inciso negativamente la data della prova (quest'anno il 10 settembre), troppo vicina alla fine delle vacanze e lontana dal periodo delle iscrizioni. All'inizio di settembre, molti giovani ancora non hanno maturato la decisione degli studi da intraprendere, altri non sono disposti a sostenere una prova poco dopo quella dell'esame di stato, altri non sono nemmeno rientrati dalla vacanza. Uno degli scopi dell'iniziativa è di far fronte al problema del «sempre meno» (iscrizioni a matematica); per questo, va evitato il pericolo che qualcuno rinunci troppo presto a seguire la via che pensava aderente alle sue inclinazioni.

L'INdAM ha fatto molto per la diffusione della notizia dell'iniziativa, ma si auspica un sempre maggiore impegno da parte dei docenti di scuola secondaria e universitari, fra l'altro con l'interessamento della CIIM, della Mathesis, degli organizzatori delle olimpiadi, ecc.

Quanto alla preparazione mostrata dai giovani che hanno partecipato alla prova, bisogna purtroppo costatare che essa non è sempre elevata. Si sono avuti risultati brillanti: 9 concorrenti hanno raggiunto un punteggio complessivo superiore a 100 (il massimo era 110), 28 un punteggio fra 80 e 99; ma 50 candidati hanno riportato un punteggio fra 0 e 20, e molti ad uno o a due o anche a tutti e tre i problemi hanno preso 0. Ai quesiti 15 giovani hanno avuto il massimo (50), dando tutte le risposte esatte, e diversi poco meno; ma circa 100 di essi non sono andati oltre il 20, e c'è stato qualcuno che è riuscito ad avere 0 punti, dando tutte riposte errate. Per i problemi, i risultati sono stati peggiori. Ha colpito in particolare la risposta al primo, che partiva dalla considerazione di un tetraedro. Soltanto 26 hanno preso il massimo (20) o poco meno; ben 165 hanno preso 0 ed altri 112 meno di 11. Si conferma così che la geometria solida non si insegna in modo adeguato nella scuola secondaria.

Per tutti i giovani che hanno tentato la prova, anche se con esito negativo, sarebbe opportuno un incontro con i docenti, universitari o non, eventualmente all'interno dei precorsi, nel quale si diano le risposte e le soluzioni con spiegazioni e commenti. I giovani comunque hanno il diritto di chiederle; i docenti hanno il dovere di darle.

IL TESTO DELLA PROVA

A) I QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. All'interno di un quadrato con il lato di lunghezza 2 si tracciano le quattro semicirconferenze aventi per diametri i lati. Qual è l'area del «quadrifoglio» che si forma?

(A) $2(\pi - 2)$
(B) $(\pi + 1)/2$
(C) $4\pi - 1$
(D) 2
(E) nessuno dei valori precedenti.

2 . Mario ha comprato un libro che costa meno di 100 euro, ma al momento di pagare ha scambiato gli euro con i centesimi: invece di pagare x euro e y centesimi, ha pagato y euro e x centesimi. Sapendo che Mario ha pagato 1 centesimo in più del triplo di quanto avrebbe dovuto pagare, si può concludere che il valore di x (cioè il prezzo in euro approssimato per difetto) è

(A) 12
(B) 25
(C) 36
(D) 37
(E) 48

3 . Il numero dei valori di k per cui l'equazione $x^2 - kx + 40 = 0$ ammette come radici due interi positivi pari è

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) infinito

4 . Su una circonferenza gli archi AB e CD non hanno punti interni in comune; le loro ampiezze sono 60° e 30°; qual è l'ampiezza dell'angolo BDP, essendo P un punto del prolungamento del segmento AD, dalla parte di D?

(A) 120°
(B) 135°
(C) 150°
(D) 160°
(E) non è determinata, dipendendo dalla posizione degli archi

5 . In una classe ci sono 10 tifosi di calcio, che si dividono fra tre squadre, l'Inter, la Juventus e la Roma, ciascuna con almeno un tifoso; la Juventus ha più tifosi dell'Inter e l'Inter ha più tifosi della Roma. Due studenti affermano che:

«L'Inter ha 3 tifosi»,
«La Roma ha 2 tifosi».

Sapendo che una (e solo una) delle precedenti affermazioni è falsa, si può concludere che il numero dei tifosi della Juventus è

(A) 4
(B) 5

(C) 6
(D) 7
(E) 8

6 . Da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola se ne tolgono casualmente 30. Successivamente si estraggono due numeri fra i rimanenti 60. La probabilità che il numero 15 sia fra i due estratti è

(A) 2/90
(B) 2/60
(C) 1/60 × 1/59
(D) 1/90 + 1/89
(E) 1/90

7 . Mettere in ordine i tre numeri $x = (1/2)^{30}$, $y = (1/3)^{20}$, $z = (1/7)^{10}$.

(A) $x < y < z$
(B) $y < x < z$
(C) $y < z < x$
(D) $z < x < y$
(E) $z < y < x$

8 . Il serbatoio di un radiatore è inizialmente riempito con 20 litri di acqua; 5 litri vengono rimpiazzati con liquido antigelo. Dalla miscela omogenea che si ottiene, 5 litri vengono sostituiti da liquido antigelo. L'operazione si ripete poi una terza volta. Quanti litri di acqua restano?

fra 4 e 5
fra 5 e 6
fra 6 e 7
fra 7 e 8
fra 8 e 9

9 . Quanti sono i numeri razionali z tali che $z + 1/z$ è intero (positivo o negativo)?

(A) nessuno
(B) 1
(C) 2
(D) infiniti
(E) nessuna delle risposte precedenti

10 . In un triangolo rettangolo due delle tre altezze hanno lunghezze 4 e 5 rispettivamente. Qual è la massima lunghezza possibile per la terza altezza?

(A) 3
(B) 9/2
(C) 7
(D) 20/3
(E) 12/5

B) I PROBLEMI

1 . Si consideri il tetraedro regolare *ABCD* di spigolo unitario.

(i) Si descrivano i due solidi secondo cui esso resta diviso dal piano per *D*, parallelo alla retta *BC* e perpendicolare al piano *ABC*.
(ii) Si determini il rapporto dei volumi delle due parti del tetraedro considerate nella domanda (i).
(iii) Siano *M* un punto del lato *AB* e *N* un punto del lato *AC*, tali che il segmento *MN* sia parallelo al lato BC. Si determini la distanza fra le rette *MN* e *BC* per la quale i volumi delle due parti secondo cui il tetraedro considerato resta diviso dal piano *MND* siano uguali.

2 . Trovare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$(6x^2 - 5x)^{6x2 - 11x} = 1.$$

3 . Siano a e b due circonferenze di centri *A* e *B* (rispettivamente), aventi raggi *a* e *b* (rispettivamente) e tangenti esternamente nel punto *T*. Sia *t* la tangente in comune passante per *T* e sia *r* un'altra retta tangente ad entrambe le circonferenze nei punti *A′* e *B′* (rispettivamente). Infine sia *P* il punto di intersezione fra *r* e *t*.

(i) Dimostrare che *P* è il punto medio del segmento *A′B′*.
(ii) Dimostrare che l'angolo *APB* è retto.
(iii) Dimostrare che l'angolo *A′TB′* è retto.
(iv) Dimostrare che la circonferenza avente diametro *AB* è tangente alla retta *r*. Qual è il punto di tangenza?

RISOLUZIONI

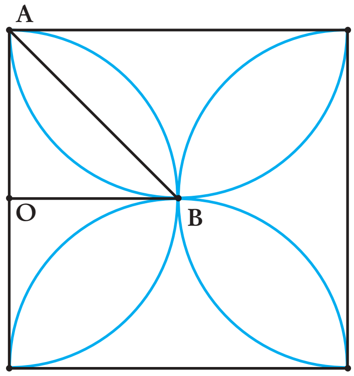
RISPOSTE AI QUESITI.

1 . La risposta esatta è (A). Basta calcolare l'area della metà di una foglia, differenza fra il settore circolare di raggio 1 e ampiezza p/4, cioè 1/4 del cerchio di raggio 1 (in fig. 1 il settore limitato dai raggi *OA* e *OB* e dall'arco *AB*) e il triangolo rettangolo

isoscele con i cateti uguali ad 1 (il triangolo AOB), e poi moltiplicare per 8. L'area del quadrifoglio è quindi

$$8\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = 2(\pi-2).$$

Figura 1



2. La risposta esatta è (A): il libro costa 12 euro e 37 centesimi. Infatti, detti x e y gli euro e i centesimi del prezzo del libro, questo si esprime (in euro) con $x + y/100$; per l'errore commesso, Mario paga (in euro) $y + x/100$, e si sa che

$$y + x/100 = 3\,(x + y/100) + 1/100$$

cioè

$$299\,x - 97\,y + 1 = 0.$$

Si tratta di un'equazione diofantea di non facile soluzione, specialmente per chi non conosca le congruenze. Si può procedere per tentativi, dando ad x i valori indicati nelle risposte; per $x = 12$ si trova che y vale 37.

Un metodo più rapido consiste nel considerare separatamente euro e centesimi. La relazione «y euro più x centesimi sono uguali a 3 volte (x euro più y centesimi) + 1 centesimo» si traduce in due sistemi, il primo nel caso in cui $3y + 1 < 100$, il secondo nel caso in cui $3y + 1 \geq 100$:

$$\begin{cases} y = 3x \\ x = 3y + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3x + 1 \\ x = 3y + 1 - 100 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni accettabili, mentre il secondo ammette l'unica soluzione $x = 12$ ed $y = 37$.

3. La risposta esatta è (C). Basta osservare che il prodotto delle due radici dell'equazione data è 40. Le coppie di numeri interi positivi pari che hanno come prodotto 40 sono solo (2,20) e (4,10); in corrispondenza si ha $k = 22$, $k = 14$, essendo k la somma delle due radici.

4 . La risposta esatta è (C). Si osservi intanto che l'ampiezza dell'arco AB è l'ampiezza dell'angolo AOB, essendo O il centro della circonferenza. L'angolo BDP, qualunque sia la posizione del punto D, non interna all'arco AB, è supplementare dell'angolo ADB; e questo è metà del corrispondente angolo al centro AOB, cioè ha ampiezza 30°. L'angolo BDP ha quindi ampiezza di 150°.

Anche se D coincide con B oppure con A il risultato vale: ad esempio, se D coincide con B, come semiretta DB deve considerarsi, per continuità, la semiretta tangente in B alla circonferenza dalla parte opposta ad O rispetto alla retta AB.

La posizione del punto C e l'ampiezza dell'arco CD non intervengono nella dimostrazione e nel risultato: la posizione di C può essere qualunque sulla circonferenza. Basta affermare che il punto D è non interno all'arco AB (se fosse interno, l'angolo BDP avrebbe ampiezza di 30°). L'enunciato del quesito è fuorviante e ingannevole, ma bisogna pure saper riconoscere situazioni di questo tipo!

5 . La risposta esatta è (C). I tifosi della Juventus sono 6, quelli dell'Inter 3 e quelli della Roma 1. Infatti, se i tifosi della Juventus fossero 5, quelli dell'Inter e quelli della Roma dovrebbero essere, rispettivamente, 3 e 2 oppure 4 e 1, per essere 10 in totale; ma, allora, nel primo caso entrambe le affermazioni sarebbero vere, nel secondo caso nessuna delle due affermazioni sarebbe vera. Se i tifosi della Juventus fossero meno di 5 non si potrebbe arrivare al totale di 10; se fossero 7, nessuna delle due affermazioni sarebbe vera; se infine fossero più di 7 non si potrebbe avere il totale di 10.

Si può anche ragionare analizzando i possibili numeri di tifosi della Roma e dell'Inter; o anche analizzando i due casi possibili sulla veridicità dell'una o dell'altra delle due affermazioni.

6 . La risposta esatta è (A). Infatti, poiché i 30 numeri tolti, sono tolti in modo casuale, la probabilità richiesta non cambia se si facesse l'estrazione dai novanta numeri. Allora i casi favorevoli sono 89, quante sono le coppie formate da 15 e da un altro numero; i casi possibili sono invece quante sono le combinazioni dei 90 numeri a 2 a 2, cioè 90×89/2. Quindi la probabilità richiesta è

$$\frac{89}{\frac{90 \times 89}{2}} = \frac{2}{90}.$$

7 . La risposta esatta è (B). Per le proprietà delle potenze, i tre numeri dati possono essere scritti nella forma:

$$x = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{10}, \quad y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{10}, \quad z = \left(\frac{1}{7}\right)^{10}.$$

Per confrontare queste tre potenze ad esponente 10, si confrontano le basi (si conserva l'ordine); si trova così:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < \frac{1}{7}.$$

8. La risposta esatta è (E). Dopo aver messo al posto di 5 litri di acqua il liquido antigelo, l'acqua presente nella miscela è litri 15; quando si tolgono, sostituendoli con liquido antigelo, 5 litri di questa miscela omogenea, cioè un 1/4 di essa, si toglie 1/4 dell'acqua presente; l'acqua che resta è quindi litri (3/4)×15. Ripetendo l'operazione viene tolto 1/4 dell'acqua presente nella nuova miscela; quella che resta è quindi litri $(3/4)^2 \times 15$, valore compreso fra 8 e 9.

9. La risposta esatta è (C). Infatti, posto $z = p/q$, e quindi $1/z = q/p$, con p e q interi diversi da 0 e primi fra loro, $(p^2 + q^2)/pq$ deve essere un numero intero. Quindi, p e q devono dividere $p^2 + q^2$; ed essendo p^2 divisibile per p, anche q^2 è divisibile per p. Ricordando che p e q sono primi fra loro, si conclude facilmente che $p = 1$ o $p = -1$ e che $q = 1$ o $q = -1$; quindi si ha $z = 1$ oppure $z = -1$.

10. La risposta esatta è (D). Le altezze di un triangolo rettangolo sono i due cateti e l'altezza relativa all'ipotenusa, che è sempre minore di ognuno dei cateti, essendo a sua volta cateto di un triangolo rettangolo di cui un cateto del primo triangolo è ipotenusa. Se 4 e 5 sono le misure dei due cateti, l'altezza maggiore del triangolo è 5. Se invece 5 è la misura di un cateto e 4 è l'altezza relativa all'ipotenusa, la misura dell'altro cateto è 20/3, come si determina sfruttando la similitudine dei triangoli ACH e BAH in fig. 2.

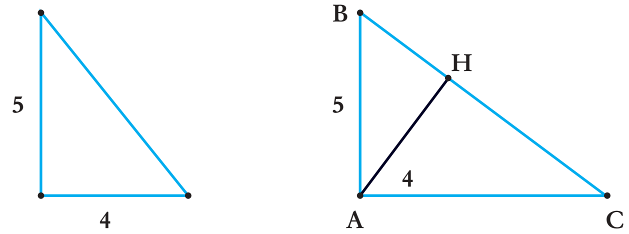


Figura 2

RISOLUZIONI DEI PROBLEMI

Problema 1: (i) Il piano considerato contiene la retta DG, essendo G il piede della perpendicolare per D al piano ABC e la retta per G parallela a BC (fig. 3). Siano E, F i punti di intersezione di questa retta con AB e AC. Dei due solidi secondo cui il tetraedro resta diviso, uno è la piramide triangolare, non regolare, $AEFD$. L'altro è la piramide quadrangolare avente come base il trapezio isoscele $EBCF$ e vertice D.

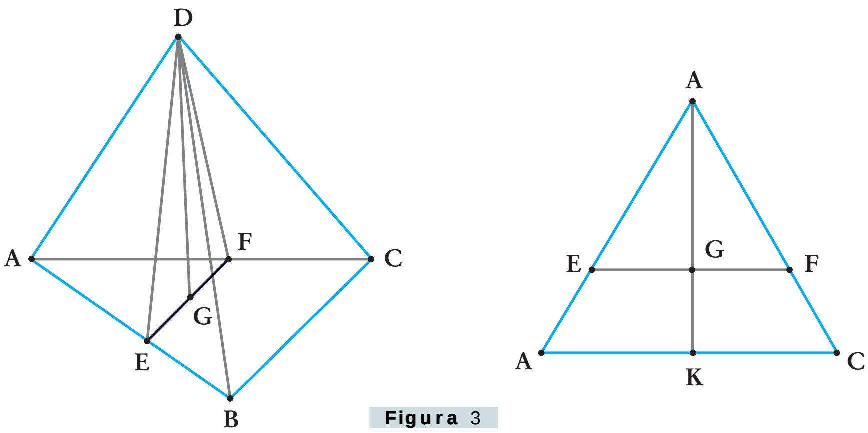


Figura 3

(ii) Considerando come base della piramide triangolare il triangolo AEF, entrambi i solidi hanno come altezza DG. Di conseguenza, dette S_1 e S_2 le aree delle basi delle due piramidi, cioè del triangolo equilatero AEF e del trapezio $EBCF$, i loro volumi sono proporzionali ad S_1 ed S_2. Quindi il rapporto dei volumi è uguale al rapporto delle aree S_1 ed S_2.

L'area del triangolo equilatero ABC è $\sqrt{3}/4$.

Il triangolo AEF è simile al triangolo ABC; il rapporto fra i lati corrispondenti è uguale al rapporto fra le altezze AG e AK, cioè 2/3; quindi il rapporto fra le aree di AEF e ABC è 4/9 e

$$S_1 = \frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Segue che l'area del trapezio $EBCF$, differenza fra l'area del triangolo ABC e quella del triangolo AEF, è

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{36};$$

ed il rapporto richiesto è 4/5.

Si noti che si può fare a meno di calcolare le aree dei due triangoli AEF ed ABC. Detta S l'area di ABC, basta considerare la proporzione, $S : S_1 = 9 : 4$ per concludere $(S - S_1) : S_1 = 5 : 4$.

(iii) Il rapporto fra i volumi delle due piramidi $AMND$ e $MBCND$ è uguale al rapporto delle aree delle basi AMN e $MBCN$ (fig. 4). Queste sono uguali se una di esse è la metà dell'area del triangolo ABC. Detta S_1 l'area del triangolo AMN ed S l'area del triangolo ABC, deve quindi essere $S_1 = S/2$.

Consideriamo come incognita x l'altezza AL del triangolo AMN (fig. 4); si ha:

$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{MN}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3}xx = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2, \qquad S = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

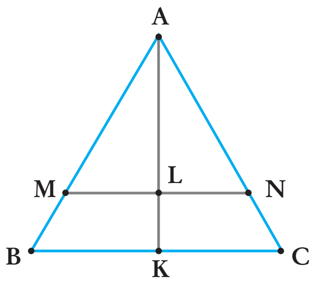


Figura 4

Quindi i volumi dei due solidi sono uguali se

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad \text{cioè} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

e la distanza fra le rette BC ed MN è

$$LK = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Se invece si considera come incognita proprio la distanza fra le rette BC e MN, cioè $KL = y$, si ha che le aree delle basi delle due piramidi e quindi i loro volumi sono uguali se, essendo $AL = \sqrt{3}/2$,

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Risolvendo, si trova

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

L'altra radice dell'equazione di secondo grado non corrisponde ad una soluzione del problema, perché è maggiore dell'altezza del triangolo ABC.

Problema 2: Una potenza con base ed esponenti reali è uguale ad 1 se e solo se

1) la base è un qualsiasi numero reale diverso da 0 e l'esponente è 0; oppure
2) la base è uguale ad 1 e l'esponente è un qualsiasi numero reale; oppure
3) la base è uguale a –1 e l'esponente è un numero intero relativo pari.

Nel primo caso, ponendo l'esponente uguale a 0,

$$6x^2 - 11x = 0,$$

si ha $x = 0$ ed $x = 11/6$; ma il valore 0 non è accettabile, perché si annulla anche la base e 0^0 non ha significato (come suol dirsi, è una forma indeterminata); si ha quindi un solo valore.

Nel secondo caso, ponendo la base uguale a 1,

$$6x^2 - 5x = 1,$$

si ha $x = -1/6$ ed $x = 1$; si hanno quindi altri due valori accettabili.

Nel terzo caso, ponendo la base uguale a –1,

$$6x^2 - 5x = -1,$$

si ha $x = 1/3$ ed $x = 1/2$; per $x = 1/3$ l'esponente vale –3; per $x = 1/2$ l'esponente vale –4 ed è quindi un altro valore accettabile.

In definitiva, ci sono quattro soluzioni: 11/6, –1/6, 1, 1/2.

Problema 3: Per dimostrare che P è il punto medio fra A' e B' si osservi che si ha $PA' = PT$, perché segmenti delle due tangenti condotte da P alla circonferenza a (fig. 5). Per analoga ragione si ha $PB' = PT$ e quindi $A'P = PB'$.

Per dimostrare che l'angolo APB è retto, si osservi che gli angoli $A'PA$ e APT sono congruenti, come analogamente gli angoli $B'PB$ e BPT. Quindi l'angolo APB, somma dei due angoli APT e TPB, è metà dell'angolo $A'PB'$; essendo questo un angolo piatto, l'angolo APB è retto.

Dimostriamo ora che l'angolo $A'TB'$ è retto. Notiamo che, essendo il triangolo $A'PT$ isoscele, si ha la congruenza degli angoli $PA'T$ e PTA'; analogamente si ha la congruenza degli angoli $PB'T$ e PTB'; quindi l'angolo $A'TB'$ è metà della somma dei tre angoli del triangolo $A'B'T$, cioè di un angolo piatto.

Dimostriamo infine che la circonferenza γ avente come diametro AB è tangente alla retta r nel punto P. Che la circonferenza γ passi per P deriva da quanto stabilito nel punto precedente, in quanto γ è il luogo dei punti che «vedono» il segmento AB sotto angolo retto. Si osservi inoltre che, detto S il centro di γ, punto medio fra A e B, le rette AA', SP e BB' determinano sulle rette AB e $A'B'$ segmenti proporzionali; poiché AA' e BB' sono parallele, essendo entrambe perpendicolari ad r, per l'inverso del teorema di Talete, PS è parallela alle rette AA' e BB', e quindi anch'essa è perpendicolare ad r, che pertanto è tangente alla circonferenza in P

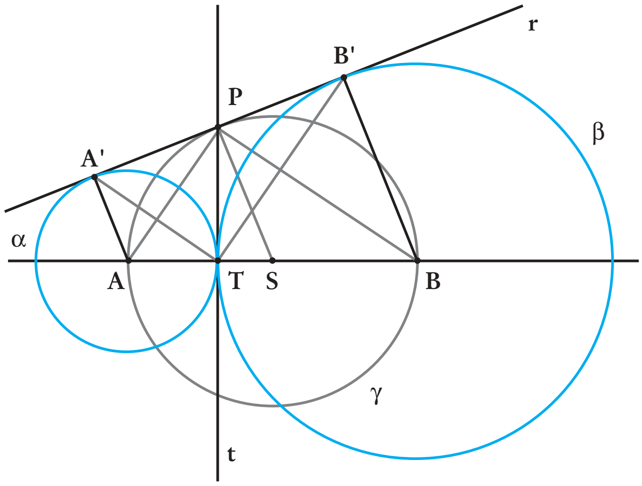


Figura 5

Aldo Morelli
Dipartimento di Matematica, Complesso Universitario
Di Monte S. Angelo, Via Cinzia, Napoli
Indirizzo e-mail: Morelli@matna2.dma.unina.it