BORSE DI STUDIO DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Il giorno 13 settembre 2005 si è svolta presso quasi tutte le sedi universitarie italiane la prova di concorso per 40 borse di studio messe a disposizione dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica per gli studenti che si immatricolano ad un corso di laurea in Matematica. La Commissione era formata da Corrado De Concini (presidente), Claudio Bernardi, Alessandro D'Andrea, Paolo Francini e Stefano Mortola.

La prova consiste in 10 quesiti a risposta multipla e in 3 problemi. I 496 candidati hanno avuto 3 ore di tempo. I punti assegnati per i quesiti sono 5 per ogni risposta giusta e 1,5 per ogni risposta non data. Ad ogni problema è assegnato un punteggio da 0 a 20. Il punteggio minimo per l'idoneità alla borsa è stato fissato in 44 su 110 e 123 candidati hanno raggiunto questa soglia. Ci sono state 20 rinunce (per lo più da parte di vincitori di posti gratuiti presso le *Scuole Superiori* e *Collegi universitari* – vedi Archimede 2/2005, pag. 84), per cui ha ottenuto la borsa anche il 60° della graduatoria.

Il sito a cui fare riferimento per il bando 2006 è

www.altamatematica.it

Anche quest'anno si presentano i testi e le soluzioni dei quesiti e dei problemi assegnati. Vogliamo ringraziare Paolo Francini per la collaborazione prestata.

IL TESTO DELLA PROVA

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Il polinomio (non nullo) $p(x)$ soddisfa la relazione

$$p\,(p\,(x)) = p(x) + p(x+3).$$

Allora $p(2)$ vale

A. 2
B. 4
C. 6
D. 8
E. 10

2. Sappiamo che i numeri reali a, b, c, x, y soddisfano il sistema

$$\begin{cases} abc = 3 \\ ab = a^2b^2 \\ bx = -by \end{cases}$$

Allora il valore di $a(x+y-2b)$ è

A. 0
B. 1
C. –2
D. –3
E. $\sqrt{3}$

3. Se in una progressione aritmetica (non costante) di numeri interi positivi è presente almeno un quadrato perfetto, allora

A. non è garantita la presenza di altri quadrati
B. non vi sono mai altri quadrati
C. vi è sempre un numero pari di quadrati
D. vi è sempre un numero dispari (e maggiore di 1) di quadrati
E. vi sono sempre infiniti quadrati

4. Un cubo è scomposto in tetraedri (cioè in piramidi a base triangolare) non necessariamente uguali fra loro. Qual è il minimo numero di questi tetraedri?

A. 3
B. 4
C. 5
D. 8
E. 12

5. Un pentagono convesso $ABCDE$ ha la proprietà che le aree dei 5 triangoli

$$ABC,\ BCD,\ CDE,\ DEA,\ EAB$$

sono tutte pari a 1. Quanto vale l'area del pentagono?

A. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$
B. 4
C. $\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}$
D. $1+2\sqrt{2}$
E. non si può determiare senza ulteriori informazioni

6. Due dadi uguali non sono ben equilibrati, e la faccia 6 esce nel 50% dei casi, mentre le altre facce sono equiprobabili. Lanciandoli insieme, qual è la probabilità di ottenere due facce uguali?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

7. L'area dell'intersezione di un quadrato Q di lato 6 con il quadrato ottenuto ruotando Q di 45° rispetto al suo centro si trova

A. tra 27 e 29
B. tra 29 e 31
C. tra 31 e 33
D. tra 33 e 35
E. al di fuori degli intervalli precedenti

8. Gli antichi Zapotechi veneravano un misterioso numero sacro. Di tale numero, chiamato ZAP, sappiamo solo che è un intero positivo e che esattamente una delle seguenti affermazioni risulta vera. Quale?

A. ZAP è multiplo di 4
B. ZAP possiede esattamente 4 divisori
C. ZAP è una differenza dei quadrati di due numeri interi
D. ZAP possiede esattamente 3 divisori
E. ZAP è dispari

9. Il numero di soluzioni intere $0 < a < b < c < d$ dell'equazione $ab + cd = 27$ è

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

10. Tizio si trova in una stanza ed afferma che «tutti coloro che si trovano in questa stanza dicono sempre bugie». Supponendo che ogni frase sia vera oppure falsa, si può dedurre che in quella stanza:

A. tutte le persone dicono sempre bugie
B. tutte le persone qualche volta dicono bugie
C. tutte le persone qualche volta dicono la verità
D. c'è almeno una persona che dice sempre bugie ed almeno una che dice sempre la verità
E. c'è almeno una persona che qualche volta dice bugie ed almeno una che qualche volta dice la verità

B) PROBLEMI

1. È assegnato un triangolo non isoscele ABC con un angolo retto in A. Siano H il punto in cui cade l'altezza sull'ipotenusa, M il punto medio dell'ipotenusa e γ la circonferenza passante per A, H, M. La circonferenza γ incontra i cateti AB e AC, oltre che in A, rispettivamente nei punti B', C'.

(a) Dimostrare che B' e C' sono i punti medi dei rispettivi cateti.
(b) Dimostrare che B', C', H, M sono i vertici di un trapezio isoscele.
(c) Dimostrare che la bisettrice dell'angolo BAC è anche bisettrice dell'angolo HAM.

2.
(a) Trovare un polinomio non costante $P(x)$ che assuma 2005 volte il valore 2005.
(b) Spiegare per quale motivo un polinomio che assume infinite volte lo stesso valore necessariamente è costante.
(c) Mostrare che se $G(x)$ è un polinomio non costante a coefficienti interi ed il suo termine noto è diverso da ± 1, allora esiste un intero k tale che $G(k)$ non è primo (e diverso da ± 1).
(d) Mostrare più in generale che, se $G(x)$ è un qualsiasi polinomio non costante a coefficienti interi, allora esiste un intero k tale che $G(k)$ non è primo (ed è diverso da ± 1).

3. Sono date una scacchiera quadrata 6×6 e delle mattonelle rettangolari 4×1 che si possono disporre sulla scacchiera, parallelamente ai suoi bordi, ed in modo che ciascuna mattonella copra esattamente quattro caselle.

(a) Si determini il massimo numero di mattonelle che possiamo inserire nella scacchiera senza sovrapposizioni.

(b) Si determini il minimo numero di mattonelle che si possono disporre sulla scacchiera in modo che non si riesca ad aggiungerne altre senza creare sovrapposizioni.

Si consideri ora un cubo $6 \times 6 \times 6$ e dei mattoni a forma di parallelepipedi $4 \times 2 \times 1$ da disporre nel cubo, analogamente al caso precedente, in modo che ciascun mattone occupi esattamente otto cubetti.

(c) Si determini il massimo numero di mattoni che possiamo inserire nel cubo senza sovrapposizioni.

RISOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. La risposta corretta è E.

Il polinomio deve avere grado 1 in quanto, in caso contrario, il primo membro sarebbe un polinomio di grado maggiore del polinomio a secondo membro. Fra i polinomi di grado 1, cioè del tipo $p(x) = ax + b$, viene soddisfatta la relazione data se

$$p(p(x)) = a(ax+b)+b = p(x)+p(x+3) = ax+b+a(x+3)+b$$

Sviluppando i conti, si trova che a e b devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} a^2 = 2a \\ ab + b = 3a + 2b \end{cases}$$

Tenendo conto che a deve essere non nullo, il sistema ha come unica soluzione $a = 2$, $b = 6$. Quindi l'unico polinomio non nullo che soddisfa la condizione data è $p(x) = 2x + 6$ e pertanto $p(2) = 10$.

2. La risposta corretta è C.

Dalla seconda relazione deduciamo che $ab = 0$ oppure $ab = 1$, e dalla prima abbiamo che ab 0. Per cui si ha $ab = 1$ e $c = 3$. La terza relazione ci dice che $b(x+y) = 0$. Ne segue che $x + y = 0$ dato che b non è nullo, per cui

$$a(x+y-2b) = -2ab = -2$$

3. La risposta corretta è E.

Se una progressione aritmetica, cioè una successione del tipo $an + b$, è formata da numeri interi, significa che i parametri a e b sono interi.

Supponiamo che $an + b = p^2$ e mostriamo che esistono infiniti numeri m tali che $am + b = q^2$ dove p e q sono numeri interi opportuni. Si ha

$$a(m-n) = q^2 - p^2$$

$$m - n = \frac{(q-p)(q+p)}{a}$$

(a è diverso da 0 perché la successione è non costante per ipotesi).

Troviamo pertanto infiniti numeri q tali che la progressione contiene il termine quadrato q^2: ad esempio in corrispondenza dei q tali che $q - p$ sia multiplo di a, cioè $q = p + ka$, nella successione troviamo i quadrati $q^2 = (p + ka)^2$, al variare di k tra i numeri naturali.

4. La risposta corretta è C.

Una maniera di decomporre un cubo in 5 tetraedri è la seguente: se indichiamo con A, B, C, D i 4 vertici del quadrato di base e con E, F, G, H i 4 vertici rispettivamente sopra ai precedenti (Figura 1), possiamo considerare il tetraedro $ACFH$ e i 4 tetraedri $BACF$, $DACH$, $EAFH$, $GCHF$.

Mostriamo che non è possibile decomporre il cubo con meno di 5 tetraedri. Infatti la superficie del cubo è formata da 6 quadrati e una faccia di tetraedro può occupare al massimo mezza faccia del cubo. Inoltre un tetraedro al massimo può occupare 3 mezze facce della superficie del cubo: quindi per occupare le 12 mezze facce del cubo si richiedono per lo meno 4 tetraedri. Ma ognuno di questi tetraedri avrebbe un volume non superiore a $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ per cui questi 4 tetraedri al massimo avrebbero un volume complessivo pari a $\frac{4}{6}$ del volume del cubo e quindi non potrebbero riempire l'intero cubo.

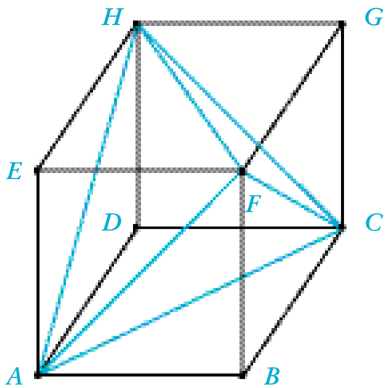

Figura 1

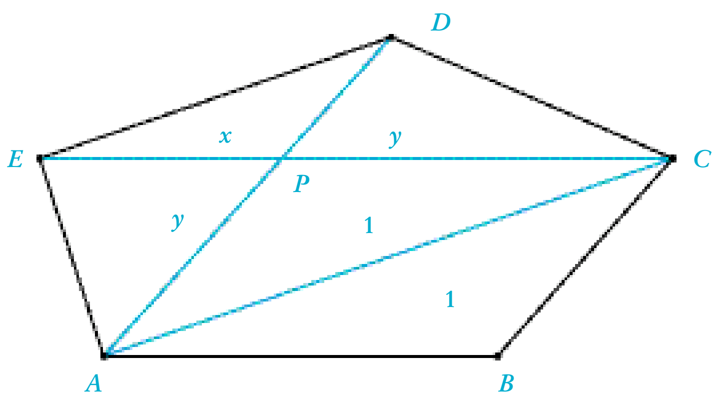

Figura 2

5. La risposta corretta è A.

Nel pentagono *ABCDE* (Figura 2) i triangoli *ABE* e *ABC* hanno la stessa base e la stessa area; quindi devono avere la stessa altezza. Questo significa che la diagonale *EC* è parallela alla base *AB*. Analogamente abbiamo che *AD* è parallela a *BC*; quindi, se *P* è il punto di intersezione tra *AD* e *EC*, il quadrilatero *ABCP* è un parallelogramma. Se indichiamo con x l'area di *EPD* e con y l'area di *EPA*, anche l'area di *CDP* vale y perché sia *EDC* che *AED* hanno area 1; inoltre l'area di *ACP* coincide con l'area di *ABC* cioè vale 1. Le aree dei 4 triangoli *EPD*, *APE*, *CPD*, *CPA* sono fra loro in proporzione, cioè si ha

$$x : y = y : 1$$

in quanto entrambi questi rapporti coincidono con il rapporto tra *DP e PA*.

Tenendo poi conto che $x + y = 1$ otteniamo

$$y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

e quindi l'area del pentagono è

$$2 + x + 2y = 3 + y = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

6. La risposta corretta è B.

La probabilità che esca il numero 6 è 1/2 e la probabilità che esca un fissato numero tra 1 e 5 è $\frac{1}{2}:5 = \frac{1}{10}$. La probabilità che esca un doppio 6 è quindi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ mentre la probabilità che escano altri due numeri uguali è $5 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$. In conclusione la probabilità che escano due numeri uguali è

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$$

7. La risposta corretta è B.

Siano *ABCD* ed *EFGH* i due quadrati (Figura 3). Indichiamo con *P* e *R* i punti di intersezione tra il lato *GH* e rispettivamente i lati *CD* e *DA*, e con *Q* l'intersezione di *CD* con *GF*. Per calcolare l'area dell'intersezione sottraiamo dall'area del quadrato *ABCD* 4 volte l'area del triangolo rettangolo isoscele *PQG*. Per determinare l'area di *PQG*, indichiamo con x la lunghezza di *PD* che è uguale alla lunghezza di *CQ* e imponiamo che l'area di *PQG* sia uguale all'area di *PDR*. La lunghezza di *PQ* è $6 - 2x$ per cui l'area di *PQG* è $(6 - 2x)^2 \frac{1}{4}$. L'area di *DPR* vale $x^2 \frac{1}{2}$, per cui x soddisfa l'equazione

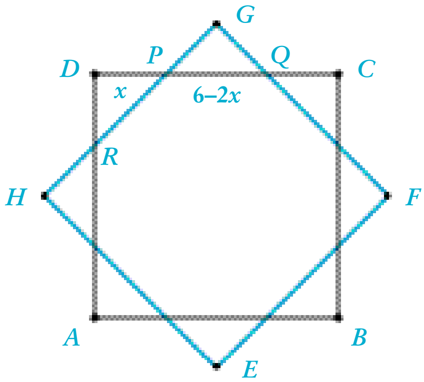

Figura 3

$$\frac{x^2}{2} = (6-2x)^2\frac{1}{4}$$

e quindi $x = 6 - 3\sqrt{2}$

In definitiva l'area dell'intersezione è

$$36 - 4\frac{x^2}{2} = 36 - 2\left(6-3\sqrt{2}\right)^2 = 72\left(\sqrt{2}-1\right)$$

il cui valore numerico è circa 29.823.

8. La risposta corretta è B.

Valgono le seguenti implicazioni:

α) E ⇒C, in quanto ogni numero dispari è la differenza dei quadrati di due numeri consecutivi:

$$2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$$

β) D⇒(A o E) in quanto se un numero ha 3 divisori questi devono essere $1 < d < n$; quindi $n/d = d$ e $n = d^2$: se d è pari allora vale A, se è dispari vale E.

γ) C⇒(A o E), in quanto, se un numero è della forma $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, se a e b sono della stessa parità allora il prodotto è un multiplo di 4, se invece sono di parità diversa allora il prodotto è dispari.

δ) A⇒C, in quanto ogni numero della forma $4h$ *si* può scrivere come $(h+1)^2-(h-1)^2$

Rimane allora come unica possibilità che sia vera l'affermazione B: abbiamo visto che, se fosse corretta una qualsiasi delle altre 4, allora automaticamente risulterebbe corretta anche un'altra affermazione.

Un possibile numero *ZAP* effettivamente esiste, ad esempio se *ZAP* è uguale a 6, B è vera e le altre 4 sono false.

9. La risposta corretta è B.

Si vede subito che se a 3 allora $ab + cd > 27$. Inoltre, se $a = 2$ l'unico modo per non superare 27 è quello di scegliere $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, ma in questo caso l'espressione varrebbe 26 e non 27. Rimane come unica possibilità $a = 1$: in questo caso si controlla subito che l'unica soluzione possibile è $b = 3$, $c = 4$, $d = 6$.

10. La risposta corretta è E.

L'affermazione di Tizio è falsa in quanto, se fosse vera, anche Tizio dovrebbe dire sempre bugie. Quindi possiamo dedurre che esiste qualcuno che qualche volta dice la verità. Tenendo poi in conto che esiste anche qualcuno che a volte dice bugie, ad esempio Tizio stesso, allora concludiamo che l'affermazione E è corretta.

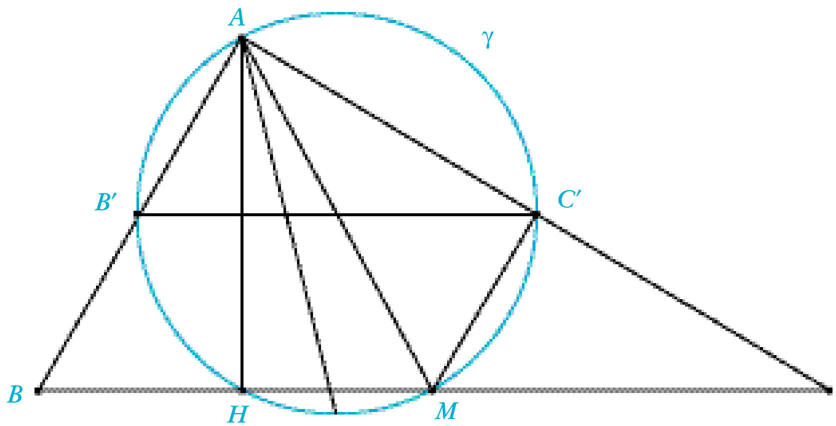

Figura 4

B) PROBLEMI

1. (a) La circonferenza γ ha diametro AM dato che l'angolo AHM è retto (Figura 4). Inoltre anche l'angolo $MB'A$ risulta retto perché sottende il diametro AM. La circonferenza di centro M e passante per B e C passa anche per A dato che BAC è retto. Quindi $AM = BM$ e nel triangolo isoscele AMB il segmento MB' oltre che altezza è anche la mediana, per cui B' è il punto medio di AB; per la stessa ragione C' è il punto medio di AC.

(b) $B'C'$ è parallelo alla base BC essendo B' e C' i punti medi dei due cateti, quindi il quadrilatero $B'C'MH$ è un trapezio ed è inscritto nella circonferenza γ. Come tutti i trapezi inscritti in una circonferenza, risulta automaticamente isoscele.

(c) L'angolo $B'AH$ è uguale all'angolo MAC' dato che sono angoli sulla circonferenza γ che sottendono rispettivamente le corde $B'H$ e $C'M$ e le due corde sono uguali fra loro. Questo comporta che la bisettrice di BAC coincide con la bisettrice di HAM.

2. (a) Si verifica subito che un polinomio che soddisfa il requisito è

$$G(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2005) + 2005$$

(b) Se un polinomio $G(x)$ (non costante) assume infinite volte un valore M, allora il polinomio $G(x) - M$ ha infinite radici, mentre il numero di radici, per il teorema di Ruffini, non può superare il grado del polinomio stesso.

(c) Supponiamo che il termine noto di $G(x)$, cioè $G(0)$, sia divisibile per il numero primo p ± 1; consideriamo i valori $G(np)$. Al variare di n tra gli interi positivi, i numeri $G(np)$ sono tutti multipli di p, ma, per quanto mostrato nel punto (b), solo un numero finito di essi è uguale a 0 ovvero a $\pm p$. Pertanto esistono infiniti numeri $G(np)$ che sono multipli propri di p, cioè del tipo kp con k diverso da 0, da -1, da 1, e quindi certamente non sono primi.

(d) Dato $G(x)$, sia A un intero qualsiasi; poniamo $H(x) = G(x + A)$. Abbiamo che $H(x)$ è un polinomio con termine noto $H(0) = G(A)$. Sempre utilizzando il punto (b) possiamo scegliere A in modo che $G(A)$ ± 1. In questo modo si può applicare al polinomio $H(x)$ quanto provato nel punto (c): dunque esiste un intero m tale che $H(m)$ non è primo e non è ± 1 (né 0). Siccome $H(m) = G(m + A)$, abbiamo trovato un intero $k = m + A$ tale che $G(k)$ non è primo ed è diverso da ± 1.

3. (a) Ogni mattonella occupa 4 caselle e in totale ne abbiamo 36 quindi il massimo numero di mattonelle non può superare 9. Si vede facilmente che è possibile inserirne 8, ad esempio mettendone 6 nelle 6 righe orizzontali, esattamente una sopra all'altra, e 2 nelle colonne rimaste vuote. (Figura 5).

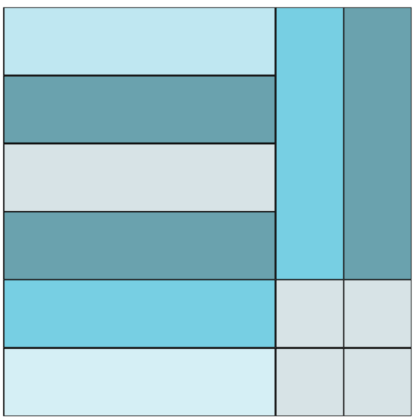

Figura **5**

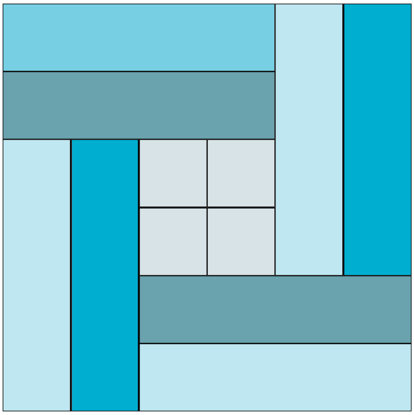

Figura 6

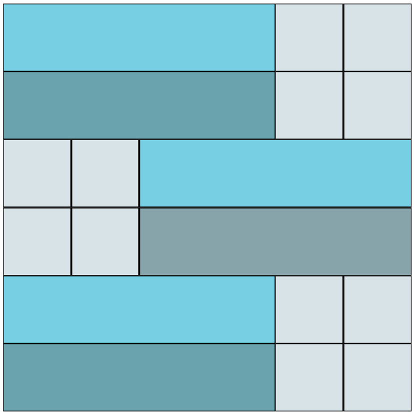

Figura 7

Vediamo che non è possibile fare meglio. Infatti se inserissimo 9 mattonelle, tutte e 36 le caselle sarebbero occupate, in particolare sarebbero occupate quelle corrispondenti ai vertici. Appena inseriamo una mattonella su una casella angolare, ad esempio nella casella in alto a destra (Figura 6), per non lasciare dei buchi siamo costretti a disporre 2 mattonelle verticalmente in alto a sinistra e, così proseguendo, risultano univocamente determinate le posizioni delle successive mattonelle. Alla fine rimangono escluse 4 caselle disposte a forma di quadrato.

Un modo più brillante per dimostrare che non possiamo inserire 9 mattonelle consiste nell'effettuare una opportuna colorazione con due colori: le 36 caselle della scacchiera formano 9 quadrati di 4 caselle ciascuna e colorando questi 9 quadrati alternativamente di bianco e di nero, alla fine avremo 5 quadrati colorati di un colore e 4 di un altro. Osserviamo che ogni mattonella inserita occupa tante caselle bianche quante nere e quindi, se fosse possibile inserirne 9, avremmo alla fine tante caselle bianche quante nere, il che è assurdo.

(b) Il numero minimo richiesto è 6 e una configurazione possibile è formata da 6 mattonelle disposte orizzontalmente in modo che 4 stanno il più possibile a sinistra e le due occupanti le righe centrali stanno il più possibile a destra, come è indicato in Figura 7.

Per mostrare che non possiamo scendere sotto il numero di 6, supponiamo che il numero delle mattonelle disposte orizzontalmente sia 0, 1 o 2. Se è 0 allora le mattonelle sono tutte verticali e in questo caso abbiamo bisogno per lo meno di 6 mattonelle per non lasciare spazio per altre. Se il numero di mattonelle orizzontali fosse 1 allora quest'unica mattonella dovrebbe essere situata nelle caselle vicine ai lati e in tal caso potremmo inserire 6 mattonelle verticali. Se il numero di mattonelle orizzontali fosse 2 allora queste dovrebbero occupare posizioni contigue ai lati oppure essere collocate in 2 righe tra loro contigue e vicine ad uno dei due lati orizzontali. In questo caso rimane la possibilità di inserirne altre 6 verticali.

(c) Il cubo $6 \times 6 \times 6$ contiene 216 cubetti unitari e ogni mattone occupa 8 cubetti, per cui il numero massimo non può certamente superare 27.

Dimostriamo che 27 non è possibile usando l'idea della dimostrazione alternativa del punto (a): basta colorare il cubo $6 \times 6 \times 6$ considerandolo suddiviso in 27 cubetti di lato 2, colorati alternativamente di bianco o di nero, in modo che cubetti adiacenti non siano dello stesso colore. Così ogni mattone $4 \times 2 \times 1$ che viene inserito occupa lo stesso numero di caselle bianche e nere, indipendentemente dalla posizione che va ad occupare: se potessimo inserire tutti e 27 i mattoni avremmo che l'intero cubo sarebbe formato da tanto nero quanto bianco, ciò è impossibile perché 27 è dispari.

Non è difficile poi dimostrare che 26 mattoni possono essere effettivamente collocati nel cubo $6 \times 6 \times 6$: ad esempio possiamo disporre 6 piani di mattoni fra loro paralleli, ciascuno piastrellato con 4 mattoni di dimensioni superficiali 4×2 e di altezza pari a 1: in questo modo abbiamo sistemato 24 mattoni che riempiono il cubo salvo un parallelepipedo di dimensioni $2 \times 2 \times 6$ in cui possiamo comodamente inserire altri due mattoni: alla fine i mattoni inseriti sono esattamente

$$24 + 2 = 26.$$

Stefano Mortola
Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Milano
stemor@mate.polimi.it

SunRa Mosconi
Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Milano,
mosconi@ sns.it