BORSE 2009 DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Il giorno 11 settembre 2009 si è svolto il concorso per l'assegnazione di 40 borse di studio a studenti che si immatricolino a corsi di laurea triennale in Matematica, organizzato dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche.

Per la prima volta alle 40 borse di studio, rinnovabili per tutta la durata del corso triennale, sono stati aggiunti altrettanti premi una tantum di 500 euro.

La prova consiste di 10 *quesiti* a risposta multipla, che assegnano un totale di 50 punti, e 3 *problemi* dei quali viene richiesto un completo svolgimento, che attribuiscono 20 punti ciascuno.

La prova si svolge in maniera decentrata nelle varie sedi universitarie, su un testo preparato da una commissione nazionale, che era quest'anno composta dai professori Angelo Alvino, Claudio Bernardi, Alessandro D'Andrea, Corrado Falcolini ed Elisabetta Strickland.

I quesiti ed i problemi riguardano argomenti di geometria piana e solida, logica, probabilità, aritmetica, algebra e combinatoria. Hanno partecipato 537 studenti; la soglia di idoneità – fissata quest'anno a 44 punti – è stata raggiunta da 233 candidati.

Una candidata di Catania ed uno di Genova hanno svolto correttamente tutti i quesiti e tutti i problemi, mentre 14 studenti hanno ottenuto un punteggio superiore a 100.

Per rientrare tra i 40 assegnatari della borsa è stato necessario ottenere 82,5 punti; per essere tra gli ulteriori 40 premiati, salvo rinunce da parte di candidati che hanno anche ottenuto l'ammissione alle varie Scuole di eccellenza italiane, bisognava totalizzare almeno 65 punti.

Dei quesiti a risposta multipla, il n. 4 è risultato il più facile, con l'82% di risposte corrette, il n. 5 il più difficile, con solo il 10% di risposte corrette ed il 64% di risposte non date, mentre l'esercizio più «insidioso» è risultato il n. 9 con il 61% di risposte sbagliate.

Il problema 2 ha avuto un voto medio di 8.5, il problema 3 un voto medio di 5.3, mentre il problema 1 un voto medio di 4.5; trascurando i problemi lasciati in bianco, le medie salgono rispettivamente a 10.5, 7.5 e 7.7.

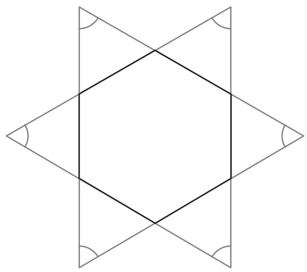
A seguire viene riportato il testo della prova, corredato dalle soluzioni. Sono state sottoposte ai candidati quattro versioni del testo, che differivano nell'ordine dei quesiti. Si ricorda inoltre che raramente un problema ammette un'unica risoluzione, e che quindi quelle riportate vanno considerate semplicemente come proposte di svolgimento.

1. IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in dieci quesiti a risposta multipla ed in tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite nello schema allegato. In ogni quesito a risposta multipla, solo una tra le cinque risposte proposte è esatta.
Saranno assegnati: 0 *punti per ogni risposta sbagliata*, 1,5 *punti per ogni risposta non data*, 5 *punti per ogni risposta esatta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da* 0 *a* 20. *La durata della prova è di tre ore. È vietato l'uso di qualsiasi strumento di calcolo.*

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

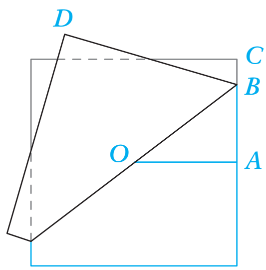
1. Sia n un intero maggiore di 4. La n-stella regolare si ottiene, a partire da un poligono regolare di n lati, prolungando ciascun lato fino alla prima intersezione con il prolungamento di un altro dei lati. In figura è illustrato il caso $n = 6$.



Per quale valore di n la somma degli angoli delle *punte* della n-stella regolare è il doppio della somma degli angoli delle punte della 6-stella regolare?

(A) per nessun valore di n
(B) 10
(C) 9
(D) 8
(E) 12

2. Un foglio di carta di forma quadrata viene piegato lungo una retta passante per il suo centro O, ad esempio come in figura. Sapendo che l'angolo $\widehat{OAB}$ è retto, dei due angoli $\widehat{AOB}$ e $\widehat{DBC}$ si può dire che:



(A) sono uguali
(B) sono uno il complementare dell'altro

(C) uno degli angoli è i 3/2 dell'altro
(D) uno degli angoli è il doppio dell'altro
(E) nessuna delle altre affermazioni è vera in generale

3. Si lanci una moneta n volte. Indichiamo con X_n il numero dei possibili esiti in cui non compaiono due teste consecutive, cioè il numero di sequenze di n simboli T ovvero C, che non contengono TT. Per esempio, $X_3 = 5$, perché le sequenze da considerare sono: CCC, CCT, CTC, TCC, TCT.
Quale fra le seguenti relazioni è soddisfatta dai numeri X_n?

(A) $X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$
(B) $X_{n+1} = X_n + 2$
(C) $X_{n+1} = 2X_n - 1$
(D) $X_{n+1} = X_n + 1$
(E) $X_{n+1} = X_n - X_{n-1}$

4. Gli abitanti di una lontana isola sono di tre tipi: i *furfanti*, che mentono sempre; i *cavalieri*, che dicono sempre la verità; i *bastian contrari*, che possono dire sia la verità sia una bugia ma, qualora non parlino per primi, mentono se e solo se chi ha parlato immediatamente prima di loro ha detto la verità.
Un giorno, fra tre abitanti X, Y, Z, si svolge la seguente conversazione:
X: «Fra noi tre c'è almeno un cavaliere»
Y: «Io sono un furfante»
Z: «Fra noi tre non c'è alcun bastian contrario».
In queste condizioni,

(A) per almeno due dei tre interlocutori, non è possibile stabilire a che tipo appartengano
(B) è certo che almeno due dei tre interlocutori sono cavalieri
(C) è certo che almeno due dei tre interlocutori sono furfanti
(D) è certo che almeno due dei tre interlocutori sono bastian contrari
(E) è certo che i tre interlocutori sono (non necessariamente in quest'ordine) un furfante, un cavaliere, un bastian contrario

5. Una piramide ha per base un triangolo equilatero e i tre spigoli laterali sono uguali tra loro. Sia P un punto interno alla piramide e siano x_a, x_b, x_c, x_d le distanze di P dalle quattro facce a, b, c, d. Indichiamo con h_a, h_b, h_c, h_d le quattro altezze della piramide relative alle corrispondenti facce.
Il valore

$$\frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} + \frac{x_c}{h_c} + \frac{x_d}{h_d}$$

(A) è sempre uguale a 2
(B) è sempre uguale a 1
(C) può assumere ogni valore strettamente compreso fra 1 e 3
(D) fissata la piramide, è indipendente dalla scelta dal punto P, ma varia al variare della lunghezza dello spigolo del triangolo equilatero di base
(E) fissata la piramide, è indipendente dalla scelta dal punto P, ma varia al variare del volume della piramide

6. In un'urna ci sono 4 palline, di cui solo 2 bianche. In una seconda urna ci sono n palline, di cui solo 4 bianche. Esiste un valore di n tale che la probabilità di estrarre 2 palline bianche dalla prima urna sia uguale alla probabilità di estrarre 2 palline bianche dalla seconda urna? Si tenga conto che l'estrazione delle 2 palline avviene senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna.

(A) No, non esiste alcun valore di n
(B) Sì, basta porre $n = 7$
(C) Sì, basta porre $n = 8$
(D) Sì, basta porre $n = 6$
(E) Sì, basta porre $n = 9$

7. Dato un numero reale positivo L, sia $p(x) = \pi x^2 - Lx + \pi$. Se $p(x) \leq 0$ per almeno un valore reale di x, allora deve essere:

(A) $p(1) \leq 0$
(B) $L \geq 3\pi$
(C) $p(x) \leq 0$ per ogni x
(D) $p(x) < 0$ per almeno un valore di x
(E) $p(2) \leq 0$

8. Il prodotto di due numeri naturali x e y, entrambi diversi da 1, è un divisore di 100. Se ne può dedurre che:

(A) almeno uno tra x e y è pari
(B) almeno uno tra x e y è multiplo di 5
(C) x è pari o multiplo di 5 (non escludendo che valgano entrambe le affermazioni)
(D) se x è pari allora y è multiplo di 5
(E) se x è multiplo di 5 allora y è pari

9. Ho due orologi, entrambi poco precisi: uno infatti ritarda di 6 minuti ogni ora, mentre l'altro anticipa di 4 minuti ogni ora. In altre parole, dopo un'ora misurata da un orologio preciso, il primo segna 54 minuti, mentre il secondo segna un'ora e 4 minuti. Li regolo entrambi a mezzanotte. Quanti secondi misura un orologio preciso tra il primo momento in cui l'orologio più veloce indica mezzogiorno e il primo momento in cui l'altro indica mezzogiorno?

(A) 14400
(B) 7500
(C) 7200
(D) 9000
(E) 6000

10. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi. È data una funzione $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tale che

- $f(2009-x)=2009-f(x)$
- $f(x)\geq x$

per ogni x appartenente a $\mathbb{Z}$. Allora:

(A) è certo che f non assume il valore 2009
(B) è certo che f assume il valore 2009 un numero finito di volte, ma più di una volta
(C) è certo che f assume il valore 2009 un numero infinito di volte
(D) è certo che f assume il valore 2009 esattamente una volta
(E) f non è univocamente determinata e può assumere o non assumere il valore 2009

B) PROBLEMI

1. Ogni punto del piano viene colorato in bianco o in nero. Dimostrare che, indipendentemente dalla colorazione scelta:

(*i*) esistono due punti dello stesso colore la cui distanza sia minore di 2;
(*ii*) esiste un segmento AB di lunghezza 2 i cui vertici A e B abbiano lo stesso colore;
(*iii*) esiste un triangolo rettangolo ABC con l'ipotenusa di lunghezza 2 e un angolo acuto di 60° tale che A, B, C siano dello stesso colore.

Si consideri analogamente una retta i cui punti vengono colorati in bianco o in nero.

(*iv*) Mostrare che per opportune colorazioni della retta non esistono segmenti di lunghezza 2 con vertici dello stesso colore.

2. Cinque lampadine sono disposte lungo una circonferenza, collegate a cinque interruttori. Ciascun interruttore controlla una delle cinque terne di lampadine consecutive. Quando un interruttore viene azionato, accende le lampadine spente e spegne quelle accese, tra quelle che controlla. All'inizio, le lampadine sono tutte spente.

Mostrare che è possibile, dopo aver azionato opportunamente gli interruttori:

(*i*) accendere solo due lampadine non adiacenti;
(*ii*) ottenere qualsiasi configurazione di lampadine accese o spente.

Supponiamo ora che ci siano dieci lampadine e dieci interruttori, ciascuno dei quali controlla, come prima, tre lampadine consecutive. Mostrare che in questo caso è possibile:

(*iii*) accendere solo due lampadine adiacenti;
(*iv*) ottenere qualsiasi configurazione di lampadine accese o spente.

3. Ogni quadrilatero convesso è diviso dalle due diagonali in 4 triangoli; chiamiamo opposti due di questi triangoli se hanno un solo vertice in comune. Si considerino le seguenti possibili caratteristiche dei 4 triangoli:

(*a*) i triangoli sono tutti equivalenti fra loro (hanno cioè tutti la stessa area);
(*b*) la somma dei perimetri di due triangoli opposti è uguale alla somma dei perimetri degli altri due;
(*c*) il prodotto delle aree di due triangoli opposti è uguale al prodotto delle aree degli altri due;
(*d*) due triangoli opposti sono simili e così pure gli altri due;
(*e*) due triangoli opposti sono simili e gli altri due sono equivalenti.

Ciascuna delle precedenti proprietà può essere soddisfatta da una o più delle cinque classi seguenti di quadrilateri:

(α) tutti i quadrilateri convessi;
(β) tutti i trapezi;
(γ) tutti i quadrilateri inscrivibili in un cerchio;
(δ) tutti i quadrilateri circoscrivibili ad un cerchio;
(ε) tutti i parallelogrammi.

Porre in corrispondenza biunivoca le cinque proprietà e le cinque classi di quadrilateri elencate, in modo che ciascuna proprietà sia soddisfatta dalla corrispondente classe, motivando la scelta operata.

2. SOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. La risposta corretta è D. Notiamo in primo luogo che, con le notazioni in figura 1, gli angoli $\widehat{CBA}$ e $\widehat{AOB}$ sono uguali perché supplementari di angoli uguali

$\widehat{ABD} = 2\widehat{ABO} = \widehat{ABO} + \widehat{OAB}$. Quindi l'angolo di una *punta* della n-stella regolare ($\widehat{BCA}$ in figura 1) misura:

$$\widehat{BCA} = \pi - 2\,\widehat{CBA} = \pi - 2\frac{2\pi}{n} = \frac{n-4}{n}\pi$$

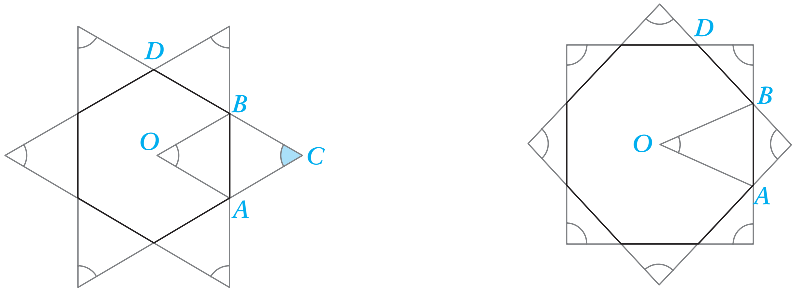


Figura 1

La somma degli n angoli della n-stella regolare è quindi uguale a $(n-4)\,\pi$, che per $n = 8$ è 4π, il doppio del caso $n = 6$.

2. La risposta corretta è D. Infatti l'angolo $\widehat{OBA}$ è uguale ad $\widehat{OBD}$, dal momento che uno si ottiene dall'altro mediante una piegatura del foglio; quindi si ha $\widehat{DBC} = 180 - 2\left(90 - \widehat{AOB}\right) = 2\,\widehat{AOB}$.

3. La risposta corretta è A. Le sequenze di lunghezza n che non contengono TT si ottengono da analoghe sequenze più corte in due modi:

- aggiungendo C a una sequenza di lunghezza $n-1$ che non contiene TT,
- aggiungendo CT a una sequenza di lunghezza $n-2$ che non contiene TT.

Le due possibilità danno luogo a sequenze diverse e non ci sono altre sequenze di lunghezza n che non contengono TT (se l'ultimo carattere è C si ricade nel primo caso, se l'ultimo carattere è T si ricade nel secondo).

4. La risposta corretta è E. Dall'affermazione di Y si deduce che Y è un bastian contrario che mente. Quindi l'affermazione di X è vera. Anche Z mente (e può essere solo un furfante).
In conclusione, c'è almeno un cavaliere, che non può essere altri che X.

5. La risposta corretta è B. Detto V il volume della piramide e usando le lettere a, b, c, d anche per indicare le aree delle 4 facce, si ha ovviamente $ah_a = bh_b = ch_c = dh_d = 3V$.

D'altra parte, la piramide data si può pensare come somma di 4 piramidi che hanno per basi le facce della piramide originaria e per vertice il punto P. Pertanto si ha: $ax_a + bx_b + cx_c + dx_d = 3V$; se ne ricava che:

$$\frac{x_a}{h_a}+\frac{x_b}{h_b}+\frac{x_c}{h_c}+\frac{x_d}{h_d}=\frac{ax_a}{ah_a}+\frac{bx_b}{bh_b}+\frac{cx_c}{ch_c}+\frac{dx_d}{dh_d}=\frac{ax_a+bx_b+cx_c+dx_d}{3V}=\frac{3V}{3V}=1$$

Le altre risposte si escludono facilmente. Per esempio, se il punto P è il vertice della piramide opposto alla base, si trova subito che il valore in questione è uguale ad 1 (P è a distanza h_a dalla base e a distanza 0 dalle altre facce, indipendentemente dalla lunghezza degli spigoli e dal volume della piramide).

6. La risposta corretta è E. Si tratta di risolvere l'equazione $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{n}\cdot\frac{3}{n-1}$ che equivale a $n(n-1)=72$, cioè di trovare due numeri naturali consecutivi il cui prodotto sia 72; i numeri sono quindi 8 e 9.
Si noti che è sbagliato procedere in modo proporzionale, perché, raddoppiando i numeri delle palline bianche e non bianche, cambia la probabilità di estrarre 2 palline bianche.

7. La risposta corretta è A. Infatti $p(0)=\pi>0$ mentre $p(x)=\pi x^2-Lx+\pi=0$ per $x=\frac{L\pm\sqrt{L^2-4\pi^2}}{2\pi}$; se $p(x)\le 0$ per qualche x deve essere necessariamente $L\ge 2\pi$ e quindi $p(1)=\pi-L+\pi=2\pi-L\le 0$.

8. La risposta corretta è C. Infatti se per qualche k si ha $x\cdot y\cdot k=100=2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$, dal momento che x ed y sono diversi da 1, ciascuno dei due deve avere come fattore il 2 o il 5.

9. La risposta corretta è B. Infatti, il primo orologio ha una velocità uguale ai 9/10 di quella corretta, mentre la velocità del secondo è uguale ai 16/15 di quella corretta. Dunque, l'orologio più veloce segna un'ora quando sono passati solo $(15/16)\cdot 3600=3375$ secondi, mentre l'altro segna un'ora quando sono passati $(10/9)\cdot 3600=4000$ secondi. La differenza è di 625 secondi all'ora e, in conclusione, di 7500 secondi in 12 ore.

10. La risposta corretta è D. Infatti, dalle due proprietà di f segue che per ogni x si ha $2009-f(x)=f(2009-x)\ge 2009-x$ e quindi che $f(x)\le x$; ma dal momento che $f(x)\ge x$ si deve avere $f(x)=x$, per ogni x. La funzione f è quindi l'identità ed assume il valore 2009 (come qualunque altro valore) esattamente una volta.

B) PROBLEMI

1.

(i) Se tutti i punti del piano sono colorati di nero, la tesi è soddisfatta. Altrimenti, detto O uno dei punti bianchi, consideriamo il cerchio di raggio 1 e di centro O. Se tale cerchio contiene almeno un punto bianco oltre ad O, tali punti si trovano a distanza minore o uguale a 1 e quindi minore di 2. Altrimenti, tutti i punti interni a tale cerchio, diversi da O, risultano neri, e due qualunque di essi hanno distanza inferiore a 2.

(ii) Si consideri un triangolo equilatero il cui lato abbia lunghezza 2. Almeno due dei suoi vertici devono avere lo stesso colore.

(iii) Presi due punti A, B dello stesso colore che distino esattamente 2 – che esistono per il punto precedente – si consideri, un esagono regolare con il lato di lunghezza 1 che li contenga come vertici opposti.

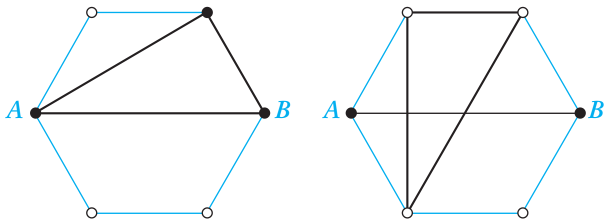


Figura 2

I vertici dell'esagono individuano (figura 2) un triangolo rettangolo del tipo richiesto. Infatti, se uno tra i quattro vertici diversi da A e B ha lo stesso colore di A e di B, abbiamo concluso. Altrimenti, tutti e quattro hanno lo stesso colore, e tre qualsiasi di essi individuano un triangolo monocromatico del tipo richiesto.

(iv) È sufficiente colorare i segmenti $[4n, 4n+2)$ di bianco e quelli $[4n+2, 4n+4)$ di nero.

2.

(i) Numeriamo le lampadine ordinatamente da 1 a 5 e supponiamo, senza perdere di generalità, che l'interruttore (1) agisca sulle lampadine 1, 2 e 3, l'interruttore (2) agisca sulle lampadine 2, 3 e 4 e così via. Azionando gli interruttori (1) e (2) si accendono le lampadine non adiacenti 1 e 4.

(ii) Azionando gli interruttori (1), (2), (4) si accende la singola lampadina 5. Facendo le stesse operazioni, a partire da un interruttore opportuno, invertiamo lo stato di ciascuna lampadina singolarmente. Ma è allora possibile ottenere qualsiasi configurazione di lampadine accese o spente, sistemando lo stato di ogni singola lampadina separatamente.

(*iii*) Notiamo, nella figura 3, che combinare le mosse (1) e (2) corrisponde a modificare (accendere o spegnere) le lampadine 1 e 4, che non sono adiacenti.

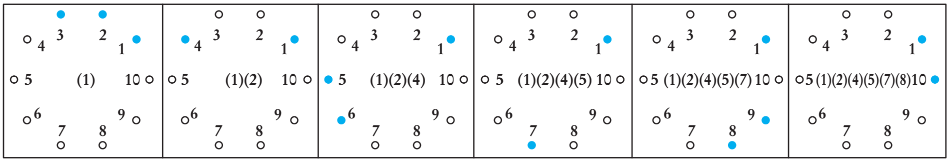


Figura 3

Visto che modificare due volte lo stato di una lampadina è equivalente a non modificarlo affatto, con le ulteriori mosse (4) e (5) si modificano le lampadine 4 e 7 e quindi, complessivamente, risultano accese solo le lampadine 1 e 7, perché la 4 era stata accesa in precedenza. Se aggiungiamo infine le mosse (7) e (8) rimarranno accese solo la 1 e la 10, che sono adiacenti poiché la disposizione delle dieci lampadine è circolare.

(*iv*) La configurazione ottenuta al punto precedente può essere immediatamente modificata con la mossa (10) che lascia accesa solo la lampadina 2. È pertanto possibile con la successione di mosse (1)(2)(4)(5)(7)(8)(10) accendere la sola lampadina 2. A patto di rinumerare le lampadine, questa procedura permette di accendere ogni singola lampadina separatamente, e quindi di ottenere qualsiasi configurazione di lampadine accese o spente.

3. Le coppie da associare per ottenere le corrispondenza biunivoca richiesta sono le seguenti.

(a) I triangoli sono tutti equivalenti fra loro; (ε) tutti i parallelogrammi.
In un parallelogramma, due triangoli opposti sono uguali, mentre due triangoli non opposti hanno basi uguali e la stessa altezza.

(b) La somma dei perimetri di due triangoli opposti è uguale alla somma dei perimetri degli altri due; (δ) tutti i quadrilateri circoscrivibili ad un cerchio.
In un quadrilatero circoscrivibile ad un cerchio la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due (vale anche l'implicazione inversa, che tuttavia qui non interessa). Tenendo presente questa proprietà, basta scrivere le somme dei lati dei triangoli per verificare che vale la proprietà (b).

(c) Il prodotto delle aree di due triangoli opposti è uguale al prodotto delle aree degli altri due; (α) tutti i quadrilateri convessi.

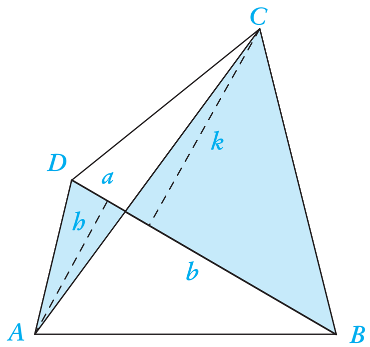


Figura 4

Fissiamo una delle due diagonali. Assumiamo come base di ciascun triangolo il lato che giace su questa diagonale e scriviamo le aree dei triangoli come «base × altezza diviso 2». I prodotti risultano uguali senza alcuna ipotesi sul quadrilatero.

(d) due triangoli opposti sono simili e così pure gli altri due; (γ) tutti i quadrilateri inscrivibili in un cerchio.
Due triangoli opposti hanno sempre un angolo uguale (angoli opposti al vertice). Se il quadrilatero è inscrivibile in un cerchio anche gli altri angoli di ciascun triangolo sono uguali ad angoli del triangolo opposto a quello considerato (angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda).

(e) due triangoli opposti sono simili e gli altri due sono equivalenti; (β) tutti i trapezi.
Tracciamo le diagonali di un trapezio $ABCD$. I triangoli che contengono le basi AB e CD sono simili (a due a due gli angoli sono uguali perché opposti al vertice oppure angoli alterni interni fra rette parallele). Gli altri due triangoli sono equivalenti perché i triangoli ABD ed ABC hanno la stessa base e la stessa altezza; se da questi si toglie la loro intersezione, si trovano appunto i due triangoli considerati.

Corrado Falcolini
Dipartimento di Matematica
Università Roma Tre
falco@mat.uniroma3.it