BORSE 2010 DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Si è svolto anche quest'anno il concorso organizzato dall'INdAM per assegnare 40 borse di studio a studenti che si immatricolano per la prima volta presso i corsi di laurea in Matematica: la commissione era composta dai Proff. Angelo Alvino (Presidente), Claudio Bernardi, Alessandro D'Andrea (Segretario), Corrado Falcolini ed Elisabetta Strickland. Le modalità di esame sono state lievemente modificate rispetto a quelle degli ultimi anni: oltre a sette quesiti a risposte multiple e a tre problemi dei quali veniva richiesta la soluzione completa, sono stati assegnati anche tre quesiti dei quali fornire una risposta numerica intera. Le domande riguardavano, come al solito, argomenti di logica, combinatoria, algebra, geometria, probabilità.

La partecipazione, sebbene inferiore ai picchi di alcuni anni fa, è stata comunque ampia: sono infatti pervenute quasi seicento domande di partecipazione, e 453 studenti hanno effettivamente svolto la prova. La graduatoria si è largamente sovrapposta all'elenco dei vincitori delle prove di accesso alla Scuola Normale Superiore e ad altri collegi universitari. A causa delle conseguenti rinunce di alcuni vincitori, sono state assegnate in totale solamente 24 borse e 40 premi da 500 euro ciascuno. Il risultato minimo per ottenere la borsa è stato di 81,5 punti, mentre quello necessario per il premio da 500 euro è stato 69.

Riportiamo a seguire il testo della prova, corredato di soluzioni. Ricordiamo, come sempre, che le soluzioni proposte sono alcune tra le possibili, in quanto ogni problema può essere affrontato in più modi, tutti ugualmente accettabili. Da un'analisi statistica dei punteggi conseguiti dai partecipanti alla prova, il quinto quesito è risultato il più semplice tra quelli a risposta multipla, mentre il secondo è stato il più difficile.

1. IL TESTO DELLA PROVA

*La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta aperta e tre problemi. Le risposte ai dieci quesiti vanno fornite nello schema allegato; per i quesiti **non** è richiesta una giustificazione della risposta.*
*In ogni **quesito a risposta multipla**, solo una tra le cinque risposte proposte è esatta. Saranno assegnati:*

- *0 punti per ogni risposta sbagliata,*
- *1,5 punti per ogni risposta non data,*
- *5 punti per ogni risposta esatta.*

*I **quesiti a risposta aperta**, che valgono 5 punti se la risposta è corretta e 0 in caso contrario, hanno per soluzione un numero intero positivo.*
*Per i **problemi** si richiede uno svolgimento completo con una motivazione di tutte le risposte; per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.*
*La durata della prova è di **tre ore**. È vietato l'uso di qualsiasi strumento di calcolo.*

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Andrea, che nel 2010 ha compiuto 20 anni, festeggia il compleanno nello stesso giorno del padre. Andrea ha verificato che in tutti i loro compleanni già trascorsi, compreso quello di quest'anno, i numeri che esprimono la sua età e l'età del padre sono primi fra loro (o coprimi, cioè il loro Massimo Comun Divisore è uguale a 1). Se viene chiesto di determinare l'età compiuta dal padre nel 2010, sapendo che è compresa tra 40 e 60 anni, il numero delle possibili soluzioni è:

(A) 0 (il problema è impossibile)
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

2. Sia $H(x, a) = 0$ un'equazione nell'incognita x, in cui compare il parametro a. Si sa che: se a è negativo, l'equazione è impossibile (cioè non ammette soluzioni); per $a = 0$, l'equazione ammette come soluzioni tutti i valori di x; se a è positivo, l'equazione ammette le due soluzioni $x = \pm\sqrt{a}$ (e nessun'altra soluzione). Se si pensa la stessa equazione $H(x, a) = 0$ come equazione nell'incognita a e con parametro x, che cosa si può dire?

(A) per un solo valore di x l'equazione è impossibile
(B) per almeno due valori di x l'equazione è impossibile
(C) per almeno un valore di x l'equazione ammette come soluzioni tutti i valori di a
(D) per tutti i valori di x, con una sola eccezione, l'equazione ammette una e una sola soluzione
(E) per tutti i valori di x, con una sola eccezione, l'equazione ammette due soluzioni distinte

3. L'equazione

$$|x^3| + |1 + x^3| = 1$$

(A) non ha soluzioni reali
(B) ha una sola soluzione reale
(C) ha esattamente due soluzioni reali

(D) ha infinite soluzioni reali
(E) ha esattamente tre soluzioni reali

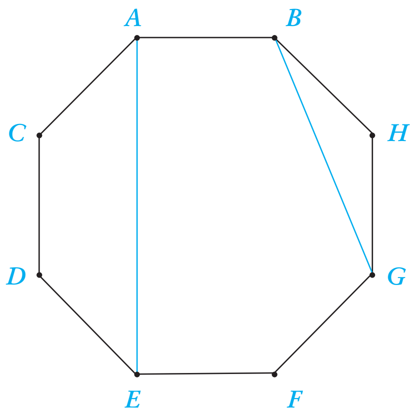
4. Otto amici, durante una vacanza, prendono in affitto due automobili. Su ciascuna di esse salgono quattro persone. In quanti modi differenti possono dividersi gli otto amici tra le due automobili? (Il caso in cui quattro amici salgono nella prima macchina e gli altri quattro nella seconda va considerato distinto dal caso in cui i primi quattro salgono nella seconda macchina e gli altri nella prima.)

(A) 24
(B) 70
(C) 140
(D) 256
(E) 4096

5. Su un campione di 100 studenti, 75 possiedono un telefono cellulare, 35 possiedono un'automobile e 30 possiedono sia un telefono cellulare che un'automobile. Allora, in tale campione:

(A) 40 studenti possiedono un telefono cellulare, ma non un'automobile
(B) 15 studenti non possiedono telefono cellulare né automobile
(C) 10 studenti possiedono un'automobile, ma non un telefono cellulare
(D) ogni studente che possiede un'automobile possiede anche un cellulare
(E) nessuna delle risposte precedenti è esatta

6. In un'urna sono contenute 6 palline contraddistinte dalle lettere C, D, E, F, G, H. Si estrae a caso una pallina, e si traccia un segmento tra il vertice corrispondente alla lettera estratta e il vertice A dell'ottagono in figura. Dopo aver rimesso la pallina nell'urna, si procede a una seconda estrazione, al termine della quale si traccia di nuovo un segmento tra il vertice corrispondente alla lettera estratta e il vertice B dell'ottagono. Alla fine, si taglia l'ottagono lungo i due segmenti tracciati.



La probabilità che l'ottagono risulti diviso in tre parti è:

(A) 1/3
(B) 1/4
(C) 1/6
(D) 4/9
(E) 5/18

7. Sono date cinque lampadine, ciascuna corredata di un interruttore. Ogni volta che si aziona uno degli interruttori, si cambia lo stato della lampadina corrispondente (cioè: si accende se è spenta, e si spegne se è accesa) e di una delle altre, che viene scelta di volta in volta a caso. Gli interruttori vengono azionati per un totale di dieci volte. Allora, sapendo che nella configurazione iniziale le lampadine erano tutte spente:

(A) alla fine sono sicuramente tutte spente
(B) alla fine sono sicuramente tutte accese
(C) alla fine è impossibile che siano tutte spente
(D) alla fine è impossibile che siano tutte accese
(E) nessuna delle risposte precedenti è esatta

B) QUESITI A RISPOSTA APERTA

8. Siano a e b due cifre decimali diverse da 0 e tra loro, e sia c una cifra decimale uguale ad a o b. Si indichi con $[xyz]$ il numero intero con x come prima cifra, y come seconda e z come terza. Sapendo che

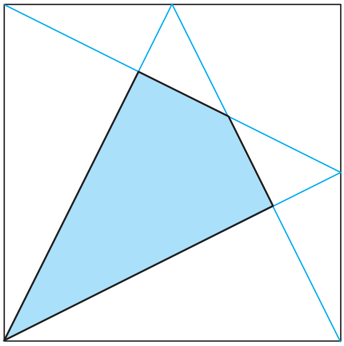
- $[bac]$ è divisibile per 2,
- $[acb]$ è divisibile per 3,
- $[bca]$ è divisibile per 5,

e che $[cba]$ ha un numero dispari di divisori, trovare $[abc]$. (Si ricorda che un m è divisore di n se esiste un intero positivo h tale che $n = hm$. Attenzione: sia 1 che n sono divisori di n).

9. Andrea e Beatrice si sfidano a un gioco: a turno devono togliere almeno una moneta da una pila; ogni volta ciascuno può però togliere non più di $\sqrt{n}$ monete, dove n è il numero di monete presenti in quel momento nella pila. Vince chi toglie l'ultima moneta. Inizia il gioco Andrea, e si sa che il numero di monete che trova nella pila è compreso tra 18 e 27.

Utilizzando la migliore strategia a propria disposizione, Beatrice ha la certezza di vincere, a prescindere dalle scelte di Andrea. Determinare il numero di monete presenti nella pila all'inizio del gioco.

10. Calcolare l'area della regione scura in figura, ottenuta congiungendo alcuni dei vertici di un quadrato ai punti medi di alcuni suoi lati, sapendo che il lato del quadrato misura 15.



C) PROBLEMI

1. In un usuale riferimento cartesiano nel piano, si consideri la parabola di equazione $y = x^2$. Chiamiamo Γ l'insieme dei punti di tale parabola che hanno per coordinate numeri interi relativi; chiamiamo *corde* i segmenti che hanno come estremi due punti distinti di Γ.

(*i*) Dimostrare che ogni corda giace su una retta che ha per coefficiente angolare un numero intero relativo.
(*ii*) Dimostrare che, per ogni numero intero relativo m, esistono infinite corde tali che le rette che le contengono hanno per coefficiente angolare m.
(*iii*) Dimostrare che i punti medi di tutte le corde parallele a una corda data hanno la stessa ascissa.
(*iv*) Dimostrare che, per ogni punto P di Γ, esiste un triangolo ABP, rettangolo in P, con A e B appartenenti a Γ.
(*v*) Dimostrare che soltanto le corde parallele all'asse x hanno lunghezza intera.

2.
(*i*) Si lanciano due monete bilanciate (cioè la probabilità di ottenere TESTA è 1/2 per ciascuna delle due). Calcolare le probabilità di ottenere:
- almeno una TESTA
- esattamente una TESTA
- al massimo una TESTA.

(*ii*) Si considerino ora due monete, per ciascuna delle quali non si conoscono a priori le probabilità di ottenere TESTA e di ottenere CROCE; è noto solo che, lanciando le due monete, la probabilità di ottenere due TESTE è uguale alla probabilità di ottenere due CROCI. In queste condizioni:

– è possibile concludere che almeno una moneta è bilanciata?
– è vero che la probabilità di ottenere TESTA nella prima moneta è uguale alla probabilità di ottenere TESTA nella seconda moneta?
– è vero che la probabilità di ottenere TESTA nella prima moneta è uguale alla probabilità di ottenere CROCE nella seconda moneta?

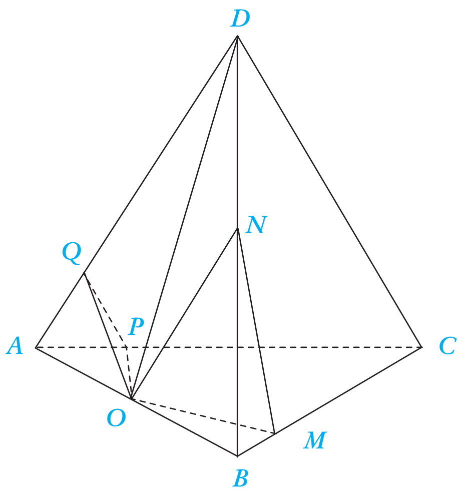
(*iii*) Nelle stesse condizioni del punto (*ii*), si consideri la probabilità che, lanciando le due monete, si ottengano due TESTE. Fra quali valori minimo e massimo può variare tale probabilità?

3.

(*i*) Un quadrilatero $XYZT$ è inscrivibile in una circonferenza e ha due lati XY e ZT non paralleli. Detto R il punto di incontro delle rette XY e ZT, dimostrare che i triangoli RZY e RXT sono simili.

(*ii*) Si consideri un tetraedro $ABCD$ e un punto O sullo spigolo AB. La sfera circoscritta al tetraedro $AOCD$ interseca gli spigoli BC e BD nei punti M ed N ($M \neq C, N \neq D$) rispettivamente.
La sfera circoscritta al tetraedro $BOCD$ interseca gli spigoli AC e AD nei punti P e Q ($P \neq C, Q \neq D$) rispettivamente. Usando quanto visto nel punto (*i*), dimostrare che i triangoli ABC e ABD sono simili ai triangoli BOM e BON rispettivamente.

(*iii*) Trovare altre coppie di triangoli simili fra quelli che hanno per vertici i punti considerati.



2. SOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. La risposta corretta è la E. Sia d la differenza di età tra Andrea e suo padre. Poiché Andrea ha 20 anni e l'età del padre è compresa tra 40 e 60, sappiamo che d

è compreso tra 20 e 40. Veniamo inoltre informati che n e $n+d$ sono primi tra loro per ogni valore di n compreso tra 1 e 20: in altre parole, nessun n compreso tra 1 e 20 ha fattori in comune con d.

Possiamo quindi concludere che $20 \leq d \leq 40$ è un numero primo: se fosse un numero composto $d = ab$, con $a, b \neq 1$, allora a e b sarebbero numeri minori o uguali a 20 e ovviamente non primi con d. I numeri primi compresi tra 20 e 40 sono: 23, 29, 31, 37, e questi sono i possibili valori della differenza d. I possibili valori dell'età del padre di Andrea nel 2010 sono quindi 43, 49, 51, 57.

2. La risposta corretta è E. Ciascun valore di $x \neq 0$ è soluzione di $H(x, a) = 0$ quando $a = x^2 > 0$, ma anche quando $a = 0$; tuttavia $x = 0$ è soluzione soltanto per $a = 0$. In altre parole, per ogni scelta di $x \neq 0$, l'equazione $H(x, a) = 0$ possiede le due soluzioni distinte $a = 0, x^2$; per la scelta $x = 0$, invece, solo il valore $a = 0$ ne fornisce una soluzione. Una possibile espressione algebrica per $H(x, a)$ è $a(a - x^2)$.

3. La risposta corretta è D. Se x è un numero compreso tra -1 e 0, allora $x^3 \leq 0$ e $1 - x^3 \geq 0$. Pertanto $|x^3| = -x^3$ e $|1 + x^3| = 1 + x^3$, e di conseguenza $|x^3| + |1 + x^3| = -x^3 + 1 + x^3 = 1$. Questo mostra che ogni numero reale compreso tra -1 e 0 è soluzione dell'equazione data.

4. La risposta corretta è B. Per descrivere la disposizione degli otto amici nelle due automobili, è sufficiente determinare quali sono i quattro che vanno nella prima automobile. Il numero da calcolare è quello delle possibili scelte di 4 elementi da un insieme di 8: questo è dato dal coefficiente binomiale

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70.$$

5. La risposta corretta è E. Dalle informazioni date, si deduce che 45 possiedono un telefono cellulare ma non un'automobile, e 5 possiedono un'automobile ma non un telefono cellulare; sappiamo già che 30 degli studenti possiedono sia l'automobile che il telefono cellulare. I restanti 20 non possiedono né automobile, né telefono cellulare. Le prime quattro risposte sono quindi tutte errate.

6. La risposta corretta è E. Un unico segmento, completamente interno all'ottagono, lo divide in sole due regioni. Due segmenti interni che si incrociano, invece, lo dividono in quattro regioni. Affinché l'ottagono risulti diviso in tre regioni, è necessario che i due segmenti tracciati siano completamente interni all'ottagono, e non si intersechino tra loro.

Per ottenere tre regioni, quindi, il vertice A non va collegato a C, il vertice B non va collegato a H, e il vertice collegato ad A non deve seguire il vertice collegato a B nell'ordine alfabetico. Se A è unito a D, B può essere unito a D, E, F, G; se A è unito a E, le possibilità per B sono E, F, G; se A è collegato a F, B può essere congiunto solo con F, G; infine, se A è unito ad F, B deve necessariamente essere collegato con F. Vi sono quindi 10 possibilità di ottenere un ottagono tagliato in tre regioni, su un totale di 36 possibili estrazioni. La probabilità è quindi di 10/36 = 5/18.

7. La risposta corretta è la D. L'azionamento di un interruttore non può cambiare la parità del numero di lampadine accese. Se nella configurazione iniziale le lampadine sono tutte spente, non ci sono possibilità di azionare gli interruttori in modo da concludere con un numero dispari di lampadine accese.

B) QUESITI A RISPOSTA APERTA

8. La risposta corretta è $[abc] = 522$. Poiché $[bac]$ è pari, la sua ultima cifra è pari; poiché $[bca]$ è divisibile per 5 la sua ultima cifra è divisibile per 5. Nessuna cifra è uguale a 0, quindi a è certamente uguale a 5, mentre c è uno tra 2, 4, 6, 8.

Se d è un divisore di N, anche N/d è un divisore di N. I divisori di N si presentano pertanto a coppie di elementi distinti $(d, N/d)$ a meno che non esista un divisore d tale che $d = N/d$. Questo accade esattamente quando $N = d^2$, cioè quando N è un quadrato perfetto.

Sappiamo che $[cba]$ ha un numero dispari di divisori, e quindi è un quadrato perfetto. I quadrati perfetti che terminano per 5 devono terminare per 25 e quindi $b = 2$, da cui $c = 2$, poiché due delle cifre coincidono, e c è pari. In conclusione, $a = 5$, $b = c = 2$ e quindi $[abc] = 522$. Si noti come la divisibilità di $[acb]$ per 3 non fosse necessaria per la risoluzione del quesito.

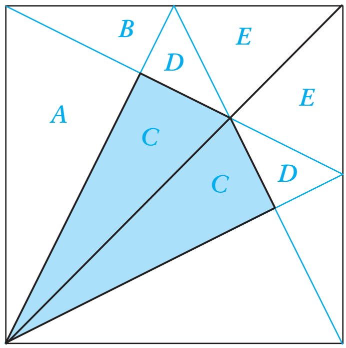
9. La risposta corretta è 22. Quando la pila contiene poche monete, è facile seguire la dinamica del gioco. Se per esempio la pila contiene inizialmente una moneta, Andrea non può che rimuoverla, e quindi vincere. Se invece contiene due monete, può solo toglierne una, ed è allora Beatrice a trovarsi in una situazione vincente. Nello stesso modo si vede che Andrea, iniziando con tre monete nella pila, non può che vincere.

Il primo caso a richiedere delle scelte è quando all'inizio vi sono quattro monete. Andrea può scegliere se toglierne una sola, e lasciare Beatrice in una situazione vincente, o toglierne due, e lasciarne due a Beatrice, obbligandola a perdere. Per strategie ottimali, Andrea vincerà quindi anche iniziando con quattro monete.

Questi ragionamenti si possono ripetere per ricavare ricorsivamente quali siano i numeri iniziali vincenti e perdenti, a strategie ottimali. Se il numero di monete è inferiore a 30, per esempio, le uniche situazioni iniziali perdenti per Andrea si hanno per 2, 5, 8, 12, 17, 22, 28 monete. Se il numero iniziale di monete è compreso tra 18 e 27, l'unico valore perdente per Andrea, e quindi vincente per Beatrice, è 22.

La strategia vincente per Beatrice è quella di lasciare, di volta in volta, ad Andrea esattamente 17, 12, 8, 5, 2 monete, cioè di metterlo sempre in situazioni perdenti. Questo le è possibile a prescindere dalle decisioni di Andrea.

10. La risposta corretta è 60. Tracciamo innanzitutto anche la diagonale del quadrato che insiste sul vertice in basso a sinistra.



Indichiamo con $Q = 15^2 = 225$ l'area del quadrato. Notiamo subito che i triangoli A e B sono simili, e l'ipotenusa del primo è doppia di quella del secondo. Pertanto l'area di A è quadrupla di quella di B e la somma delle aree è un quarto di quella del quadrato. Pertanto

$$A = 4B, \quad A + B = \frac{Q}{4} \qquad \text{e quindi} \qquad A = \frac{Q}{5}, \quad B = \frac{Q}{20}.$$

$B + D$ ed E sono le aree di triangoli che hanno basi uguali e stessa altezza, e quindi coincidono. Inoltre $B + D + E + E$ è un quarto dell'area del quadrato, e quindi

$$B + D = E, \quad B + D + 2E = \frac{Q}{4} \qquad \text{e di conseguenza} \qquad E = \frac{Q}{12}.$$

L'area che si trova al di sopra della diagonale del quadrato è $A + B + C + D + E = A + C + (B + D) + E = A + C + 2E$, ed è uguale a $Q/2$. Utilizzando le informazioni precedenti si ottiene:

$$A + C + 2E = \frac{Q}{2}, \text{ da cui } C = \frac{Q}{2} - A - 2E = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{5} - 2\frac{Q}{12} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)Q = \frac{2}{15}Q.$$

L'area da individuare è $2C$ e concludiamo facilmente

$$2C = \frac{4}{15}Q = \frac{4 \cdot 15^2}{15} = 60.$$

È anche possibile ricavare, attraverso semplici conti di geometria analitica, le coordinate dei vertici della regione colorata, e a partire da questi l'area. Alternativamente, si può osservare che uno dei vertici della figura colorata è il baricentro del triangolo rettangolo isoscele al di sopra dell'altra diagonale del quadrato: questo permette di calcolare la lunghezza di una delle diagonali della figura. La lunghezza dei due lati maggiori si ottiene invece applicando il Teorema di Euclide al triangolo rettangolo in basso a destra nella figura; il calcolo dell'area è adesso immediato.

C) PROBLEMI

1.

(*i*) Due punti distinti sulla parabola hanno coordinate (a, a^2), (b, b^2) con $a \neq b$. Il coefficiente angolare della retta che li contiene è quindi $m = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$, che è necessariamente un numero intero se a, b sono interi.

(*ii*) Abbiamo calcolato il coefficiente angolare nel punto precedente, e quindi dobbiamo solo verificare che, fissato m, esistono infinite scelte di interi $a < b$ tali che $m = a + b$. Ma questo è ovvio: basta prendere $b = m - a$, al variare di $a < m/2$.

(*iii*) Il punto medio della corda di estremi (a, a^2) e (b, b^2) è $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$ e pertanto l'ascissa è la metà del coefficiente angolare della retta contenente la corda.

(*iv*) Se i punti A, B, P hanno coordinate (a, a^2), (b, b^2), (p, p^2) rispettivamente, i coefficienti angolari delle rette che contengono i segmenti AP, BP sono $a + p$, $b + p$ rispettivamente. La condizione di perpendicolarità si traduce allora in $(a + p)(b + p) = -1$. Basta allora scegliere a, b in modo che, per esempio, $a + p = -1$, $b + p = 1$: è sufficiente porre $a = -p - 1$, $b = -p + 1$.

(*v*) La corda che congiunge (a, a^2) a (b, b^2) ha per lunghezza

$$\sqrt{(a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2} = \sqrt{(a-b)^2 \cdot (1 + (a+b)^2)} = |a - b| \sqrt{1 + (a+b)^2}.$$

Affinché tale lunghezza sia intera, il numero $\sqrt{1 + (a+b)^2}$ deve essere quindi razionale, e questo è possibile solo se $1 + (a + b)^2$ è quadrato perfetto. Ma l'unico quadrato perfetto a essere il successore di un quadrato perfetto è 1, e questo obbliga alla scelta $m = a + b = 0$, cioè a scegliere la corda in modo che sia orizzontale.

2.

(*i*) I quattro esiti equiprobabili sono TESTA TESTA, TESTA CROCE, CROCE TESTA, CROCE CROCE e pertanto le probabilità richieste sono 3/4, 1/2, 3/4.

(*ii*) Siano p_1 e p_2 le probabilità di ottenere TESTA con la prima e la seconda moneta rispettivamente. Allora la probabilità di ottenere due TESTE è $p_1 p_2$ e

quella di ottenere due CROCI è $(1-p_1)(1-p_2)$. Tali probabilità sono uguali quando p_1p_2 coincide con $(1-p_1)(1-p_2) = p_1p_2 - p_1 - p_2 + 1$, cioè quando $p_1 + p_2 = 1$.
Questa condizione non garantisce che p_1 o p_2 valgano 1/2, né che p_1 coincida con p_2, ma assicura che $p_1 = 1 - p_2$. Quindi la probabilità di ottenere TESTA con la prima moneta deve essere uguale alla probabilità di ottenere CROCE con la seconda.

(*iii*) Per quanto appena detto, la probabilità di ottenere due TESTE è $p_1p_2 = p_1(1-p_1)$. Se $0 \le p_1 \le 1$, i valori assunti da $p_1(1-p_1)$ sono compresi tra 0, che si ottiene quando $p_1 = 0, 1$, e il massimo 1/4, che si ottiene quando $p_1 = 1/2$. Questo si può mostrare in tanti modi: calcolando le coordinate del vertice della parabola $y = x(1-x)$; utilizzando la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica; studiando il segno della derivata. Il modo più semplice è forse quello di osservare che

$$p_1 - p_1^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - p_1\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

3.

(*i*) $XYZT$ è un quadrilatero ciclico, e quindi gli angoli $\angle XYZ$ e $\angle ZTX$ sono supplementari. Di conseguenza, l'angolo $\angle ZTX$ è uguale all'angolo $\angle RYZ$. Ma allora i triangoli RYZ e RTX hanno l'angolo in R in comune e gli angoli $\angle RYZ$ e $\angle RTX = \angle ZTX$ uguali, e sono pertanto simili.

(*ii*) La sfera S circoscritta al tetraedro $AOCD$ contiene anche i punti M ed N. I punti A, O, N, D giacciono quindi su S, e appartengono anche al piano π che contiene la faccia ABD. Pertanto si trovano tutti su $S \cap \pi$, che è una circonferenza, essendo intersezione di una sfera con un piano; in altre parole, il quadrilatero $AOND$ è inscritto in una circonferenza, e possiamo quindi applicargli il risultato esposto nel punto precedente. In questo modo, otteniamo che i triangoli ABD e NBO sono ordinatamente simili.
Questo ragionamento si può ripetere anche per la faccia BCD (risp. ABC) per ottenere che i triangoli CBD, NBM (risp. ABC, MBO) sono ordinatamente simili.

(*iii*) Sostituendo la sfera S con quella circoscritta al tetraedro $BOCD$, si mostra allo stesso modo che il triangolo BAC è simile con PAO, così come anche BAD con QAO, e DAC con PAQ. È più complesso mostrare, ma ugualmente vero, che i triangoli ONM e OPQ sono simili. Un modo di osservarlo è il seguente.
I triangoli BOM e POA sono ordinatamente simili, perché entrambi simili a BCA; ne segue

$$OM/OB = OA/OP.$$

Allo stesso modo, i triangoli BON e QOA sono ordinatamente simili, perché entrambi simili a BDA; ne segue

$$ON/OB = OA/OQ.$$

Dividendo membro a membro, si ottiene $OM/ON = OQ/OP$.
In ciascuna delle seguenti 4 righe, compare una coppia di triangoli ordinatamente simili, seguita da una proporzione fra lati corrispondenti di quei triangoli:

BNM,	BCD	$MN/BN = DC/BC$
AQP,	ACD	$QA/QP = AC/DC$
QOA,	BON	$OA/QA = ON/BN$
APO,	ABC	$OP/OA = BC/AC$

Moltiplicando membro a membro e semplificando, si conclude $MN/ON = QP/OP$.
Dalle uguaglianze $OM/ON = OQ/OP$ e $MN/ON = QP/OP$ si vede subito che i triangoli ONM e OPQ sono ordinatamente simili.

Alessandro D'Andrea
Dipartimento di Matematica
Sapienza - Università di Roma
dandrea@mat.uniroma1.it