LE BORSE DI STUDIO INDAM 2012/2013

Da oltre un decennio, all'inizio di ogni mese di settembre, si svolge la prova nazionale per assegnare le borse di studio bandite dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM), destinate agli studenti che si iscrivono al primo anno dei Corsi di Laurea in Matematica. Per l'anno accademico 2012/2013, la prova si è tenuta il giorno 8 settembre 2011, con la partecipazione di 413 candidati, un numero decisamente più ridotto rispetto agli anni precedenti (l'anno scorso, per esempio, furono 604). Hanno fatto parte della Commissione Giudicatrice Angelo Alvino (nelle vesti di Presidente), Claudio Bernardi, Paolo Francini, Stefano Mortola, Elisabetta Strickland.

La fisionomia della prova, simile a quella dello scorso anno, prevede una batteria di 10 quesiti (7 a risposta multipla, 3 a risposta numerica «secca») e 3 problemi a carattere dimostrativo, con tre ore e mezza a disposizione dei candidati.

L'andamento della prova ha ancora una volta messo in evidenza la forte differenziazione dei risultati su base territoriale (a vantaggio del Nord rispetto al Sud) e un certo squilibrio tra i generi nella fascia alta dei punteggi (3 ragazze nei primi 40 classificati, 9 nei primi 80, 30 nei primi 160).

I punteggi registrati sono stati in media più elevati degli anni scorsi, fatto ascrivibile forse ad una più severa autoselezione dei candidati (ravvisabile anche nella riduzione del numero dei partecipanti) e, almeno in parte, ad una maggiore accessibilità delle questioni proposte nella prova. Il punteggio medio in ciascuno dei tre problemi si è aggirato attorno a 10 punti su 20, a fronte dei 5 su 20 fatti registrare l'anno precedente.

Tra i quesiti, il più semplice è risultato il n. 5 (di logica, 76% di risposte esatte), mentre fra i più difficili ci sono stati il n. 7 (geometrico, 15% di risposte esatte), e il n. 3 (aritmetico-algebrico, 9% le risposte esatte e ben il 58% quelle in bianco).

Nella graduatoria finale, 8 studenti hanno superato i 100 punti su 110, mentre il 40-esimo (ultima posizione utile per la borsa di studio) ha ottenuto 87 punti (l'anno scorso erano 68,8) e l'80-esimo (ultima posizione per il premio di 500 euro) ha realizzato 72,5 (l'anno scorso erano 50,2).

1. IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema allegato nell'apposito foglio. È ammesso l'uso della riga e del compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di ***tre ore e mezza.***

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 *a* 7*, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:*

- 0 *punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);*
- 1,5 *punti in caso di risposta mancante;*
- 5 *punti in caso di risposta esatta.*

1. Due ciclisti partono da punti diametralmente opposti di una pista circolare, procedendo entrambi in senso anti-orario. Ciascuno dei due si muove a velocità costante, ma la velocità del primo è il 40% in più rispetto a quella dell'altro. Il ciclista più veloce raggiunge il più lento quando quest'ultimo ha percorso un giro completo della pista più altri 140 metri. Quanti metri è lunga la pista?

(A) 700
(B) 280
(C) 196
(D) 400
(E) 560

2. Sono assegnati quattro numeri. Si sa che, sommando ciascuno di essi alla media degli altri tre, si ottengono rispettivamente i numeri $25, 37, 43, 51$. Qual è la media dei quattro numeri assegnati?

(A) 19,5
(B) 17
(C) 23
(D) 39
(E) 23,5

3. Per quanti valori reali di k le radici del polinomio $p(x) = x^2 - kx + 3k + 1$ sono due interi relativi?

(A) 4
(B) 1
(C) nessuno
(D) 3
(E) infiniti

4. Si consideri un quadrilatero convesso che ammette al suo interno un punto T le cui distanze dai quattro vertici sono $1\text{ cm}, 2\text{ cm}, 3\text{ cm}, 4\text{ cm}$ (non necessariamente in quest'ordine). Qual è la massima area possibile del quadrilatero?

(A) 10,5 cm^2
(B) 10 cm^2
(C) 12 cm^2
(D) 14 cm^2
(E) 12,5 cm^2

5. Un'isola è abitata da cavalieri (che dicono sempre la verità) e furfanti (che invece mentono sempre). Un esploratore incontra tre nativi e uno di loro dice: «*Fra noi tre, almeno due sono furfanti*». L'esploratore può dedurre che fra i tre nativi:

(A) c'è almeno un cavaliere e c'è almeno un furfante
(B) ci sono più furfanti che cavalieri
(C) c'è almeno un furfante, ma non si sa se c'è almeno un cavaliere
(D) c'è almeno un cavaliere, ma non si sa se c'è almeno un furfante
(E) ci sono più cavalieri che furfanti

6. Due dadi, che hanno sulle facce i numeri da 1 a 6, sono uguali ma truccati (ad esempio, la probabilità che esca 3 nel primo dado è uguale alla probabilità che esca 3 nel secondo dado, ma questa probabilità non è necessariamente $1/6$). Si sa che, lanciando i due dadi, la probabilità che il prodotto dei due numeri usciti sia pari è $5/9$. La probabilità che la somma dei due numeri sia pari è dunque…

(A) 1/9
(B) 1/4
(C) 4/9
(D) 5/9
(E) 3/4

7. Dato un triangolo XYZ di area 1, cerchiamo al suo interno un punto P in modo tale che, congiungendo P ai vertici X, Y, Z, il triangolo XYZ resti suddiviso in tre triangoli le cui aree siano $1/2, 1/3, 1/6$. Quanti sono, esattamente, i punti P siffatti?

(A) sono sempre 3
(B) o nessuno oppure 1 (dipende dal triangolo XYZ)
(C) o 1 o 2 o 3 (dipende dal triangolo XYZ)
(D) sono sempre 2
(E) sono sempre 6

B) QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 *a* 10*, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:*

- 0 *punti per ogni risposta errata;*
- 0 *punti per ogni risposta non data;*
- 5 *punti per ogni risposta esatta.*

8. Posto $11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11$ (il prodotto dei numeri interi da 1 a 11), qual è il minimo intero positivo k per il quale il prodotto $k \cdot 11!$ è un quadrato perfetto?

9. Qual è il grado del polinomio

$$q(x) = ((x^5 + 3x^2 - 1)^{40} - (x^4 + 7)^{50}) \cdot ((x + 2)^{22} - (x + 1)^{22})^{100} ?$$

10. Quanti sono i numeri naturali minori di 1000 nei quali la somma delle cifre è uguale a 15?

C) PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, motivando adeguatamente tutte le risposte. Una proposizione che sia contenuta nel testo di un problema, di cui sia richiesta la dimostrazione, può essere utilizzata per affrontare le parti successive del problema stesso, anche qualora non sia stata svolta la dimostrazione richiesta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 *a* 20.

1. In alcuni tornei di calcio (come ad esempio i campionati del mondo), si formano gironi di 4 squadre: ciascuna di esse incontra una volta le altre 3, per cui in un girone si giocano complessivamente 6 partite. Vengono assegnati 3 punti per la vittoria e 0 per la sconfitta, mentre in caso di pareggio le squadre ricevono entrambe 1 punto.

(A) Quali punteggi può realizzare una squadra alla fine del girone? Quali sono le possibili somme dei punteggi realizzati dalle 4 squadre?
(B) Se le 4 squadre di un girone terminano tutte in parità, quali sono i possibili punteggi di ciascuna?
(C) È vero che due squadre possono concludere con lo stesso punteggio pur avendo vinto un diverso numero di partite?
(D) Se due squadre terminano rispettivamente a 6 e a 5 punti, quali possono essere i punteggi delle altre due squadre? Se tre squadre terminano a 3 punti, quale può essere il punteggio della quarta squadra?

2. In un triangolo acutangolo e scaleno ABC, sia M il punto medio del lato BC e sia r la retta passante per A e M. Siano, inoltre, B' e C' i piedi delle perpendicolari condotte a r dai punti B e C rispettivamente.

(A) Dimostrare che i triangoli ABM e ACM hanno la stessa area.
(B) Dimostrare che il quadrilatero $BB'CC'$ è un parallelogramma.

(C) Il quadrilatero $BB'CC'$ può essere inscrivibile in una circonferenza? Può essere circoscrivibile ad una circonferenza?

(D) Supponiamo adesso che il quadrilatero $BB'CC'$ abbia la stessa area del triangolo ABC e che, inoltre, $BC = 10$ e $AM = 6$. Quali sono in tal caso l'area e il perimetro di ABC?

3.

(A) Verificare l'identità

$$\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z} = -\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{xyz},$$

per qualsiasi terna x, y, z di numeri reali non nulli.

(B) Dedurre che, per ogni terna a, b, c di numeri reali distinti e tali che $a + b + c = 0$, si ha

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b} = -\frac{9abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

(C) Concluderne che, per ogni terna a, b, c di numeri reali distinti e non nulli, tali che $a + b + c = 0$, si ha

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right) = 9.$$

2. SOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Risposta: E.

A parità di tempo, il rapporto tra le velocità coincide con il rapporto tra gli spazi percorsi. Se L indica la lunghezza, misurata in metri, della pista, nel tempo in cui il ciclista più lento ha percorso $L + 140$ metri il più veloce ha percorso $L/2$ in più. Perciò abbiamo la seguente equazione:

$$\frac{140}{100} = \frac{L+140+L/2}{L+140}.$$

L'equazione equivale a

$$14(L+140) = 10\left(\frac{3}{2}L+140\right)$$

da cui deduciamo che $L = 560$ m.

2. Risposta: A.
Le ipotesi ci forniscono queste equazioni per i numeri x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = 25 \\ x_2 + \dfrac{x_3 + x_4 + x_1}{3} = 37 \\ x_3 + \dfrac{x_4 + x_1 + x_2}{3} = 43 \\ x_4 + \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 51 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le 4 equazioni, si ottiene $S + \dfrac{3S}{3} = 25 + 37 + 43 + 51$ (dove S indica la somma dei 4 numeri), vale a dire $2S = 156$, per cui $S = 78$. La media vale dunque $S/4 = 19{,}5$.

3. Risposta: A.
Indicate con a e b le radici del polinomio, si ha $a + b = k$ e $ab = 3k + 1$. Pertanto vale l'uguaglianza

$$ab = 3(a + b) + 1$$

che è possibile riscrivere nella forma seguente:

$$(a - 3)(b - 3) = 10.$$

Dato che le radici devono essere intere, abbiamo solo queste 4 possibilità:

- $a - 3 = 5$ e $b - 3 = 2$;
- $a - 3 = 10$ e $b - 3 = 1$;
- $a - 3 = -5$ e $b - 3 = -2$;
- $a - 3 = -10$ e $b - 3 = -1$;

(oltre alle altre 4 ottenute invertendo a con b, ma questo scambio non altera i valori di $k = a + b$). Le 4 possibilità elencate corrispondono, nell'ordine, ai valori $k = 13, 17, -1, -5$.

4. Risposta: E.
Un triangolo che ha due lati che misurano a e b ha un'area che non supera $ab/2$ e tale valore viene raggiunto solo se i due lati sono tra loro ortogonali. Quindi, una volta fissato l'ordine in cui si succedono le misure dei 4 segmenti che uniscono i

vertici al punto T (ad esempio in senso orario), se si fa in modo che ciascuno di tali segmenti sia ortogonale al precedente e al successivo, si avrà un quadrilatero di area massima tra tutti quelli dove le misure dei 4 segmenti suddetti si succedono nello stesso ordine.
Un tale quadrilatero avrà le diagonali ortogonali che si intersecano in T e la sua area sarà la metà del prodotto delle diagonali. Si tratta quindi di scegliere come abbinare le misure $1, 2, 3, 4$ in due coppie, in modo che sia massimo il prodotto delle due somme. Il massimo si ottiene abbinando 1 con 4 e 2 con 3, il che dà luogo a due diagonali di misura 5, per un'area pari a $12{,}5$.

5. Risposta: A.
Abbiamo due sole possibilità da esaminare:

- se il nativo sta dicendo la verità, allora non ci possono essere altri furfanti, per cui i tre nativi sono due furfanti ed un cavaliere;
- se il nativo sta mentendo, allora solo lui è il furfante, per cui abbiamo un furfante e due cavalieri.

Non sappiamo in quale dei due casi ci troviamo, ma comunque possiamo concludere che fra i tre nativi ci deve essere almeno un furfante e almeno un cavaliere.

6. Risposta: D.
Indichiamo con p la probabilità che esca un numero pari da uno qualunque dei due dadi; quindi $1-p$ rappresenta la probabilità che esca dispari. Teniamo conto che il prodotto di due numeri è dispari se e solo se entrambi sono dispari, per cui la probabilità che il prodotto dei due numeri usciti sia dispari è $(1-p)^2$. Di conseguenza la probabilità che sia pari è $1-(1-p)^2$, per cui abbiamo questa uguaglianza:

$$1-(1-p)^2 = \frac{5}{9}$$

da cui si ricava che $p = 1/3$. La probabilità che la somma dei due numeri sia pari è data dalla somma delle probabilità che entrambi siano pari (che è $1/3 \cdot 1/3 = 1/9$) con la probabilità che entrambi siano dispari (che è $2/3 \cdot 2/3 = 4/9$). Tale somma vale $5/9$.

7. Risposta: E.
Affinché un punto P sia il vertice di un triangolo PXY di area $1/2$ dell'area del triangolo è necessario e sufficiente che appartenga alla retta che interseca il triangolo ed è parallela al lato XY ad una distanza pari alla metà dell'altezza relativa allo stesso lato. Analogamente, se P è il vertice di un triangolo PXY di area $1/3$ o $1/6$ dovrà rispettivamente stare su rette parallele al lato XY ad una distanza pari a $1/3$ o $1/6$ dell'altezza.

Quindi i punti che suddividono il triangolo nella maniera richiesta sono in totale 6, tanti quanti sono i possibili modi di scegliere per ciascun lato uno dei numeri 1/2, 1/3, 1/6, facendo tre scelte differenti. Si tratta, in pratica, di contare le permutazioni di 3 oggetti distinti (ognuna delle 6 permutazioni determina un unico punto P ottenuto come intersezione delle opportune rette parallele ai lati precedentemente descritte).

B) QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

8. Risposta: 77.
Risulta infatti $11! = (2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2) \cdot 7 \cdot 11$. Nelle parentesi abbiamo già un quadrato perfetto; per ottenere un quadrato non nullo, il numero 11! andrà dunque moltiplicato per i fattori 11 e 7, ossia per un qualsiasi numero del tipo $77n^2$. Il più piccolo di essi è appunto 77.

9. Risposta: 2297.
I polinomi $(x^5 + 3x^2 - 1)^{40}$ e $(x^4 - 7)^{50}$ sono monici (cioè il coefficiente del termine di grado massimo è 1) ed entrambi di grado 200, per cui la loro differenza ha grado minore di 200. Eliminando il termine x^{200} da entrambi i polinomi, i termini di grado massimo hanno rispettivamente grado $5 \cdot 39 + 2 = 197$ e $4 \cdot 49 = 196$, quindi il polinomio differenza ha grado 197. Anche i polinomi $(x + 2)^{22}$ e $(x + 1)^{22}$ hanno lo stesso grado e la loro differenza ha grado 21, dato che i rispettivi termini di grado 21 hanno coefficienti diversi. Perciò il polinomio $((x + 2)^{22} - (x + 1)^{22})^{100}$ ha grado 2100. In conclusione, il polinomio dato, prodotto di un polinomio di grado 197 e un polinomio di grado 2100, sarà di grado $197 + 2100 = 2297$.

10. Risposta: 73.
Se la prima cifra è 9 abbiamo le seguenti 7 possibilità per le altre due cifre: 06, 15, 24, 33, 42, 51, 60. Se la prima cifra è 8 abbiamo 8 possibilità (07, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70), se è 7 abbiamo 9 possibilità, se è 6 abbiamo 10 possibilità, se è 5 abbiamo solo 9 possibilità, se è 4 ne abbiamo 8, se è 3 ne abbiamo 7, se è 2 ne abbiamo 6, se è 1 ne abbiamo 5; se è 0 (cioè se il numero ha solo due cifre), allora abbiamo le seguenti 4 possibilità: 69, 78, 87, 96. Il numero totale è quindi: $7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 73$.

C) PROBLEMI

1.

(A) I possibili punteggi sono gli interi da 0 a 9, con l'esclusione di 8.
La somma dei punteggi varia da 12 (tutti pareggi) a 18 (nessun pareggio); la somma $12 + a$ si realizza con a vittorie e $6 - a$ pareggi.

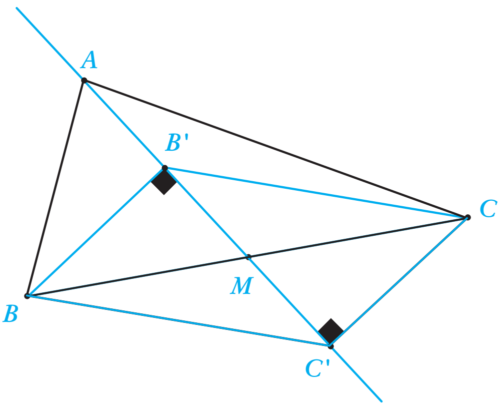
(B) Fra i numeri precedenti ci sono solo due multipli di 4, ossia 12 e 16. In effetti, ci sono due risposte: 3 (tutti pareggi) o 4 (ogni squadra ha una vittoria, un pareggio e una sconfitta).

(C) No. L'unico punteggio che si può realizzare in due modi è 3 (tre pareggi, oppure una vittoria e due sconfitte). Ma se una squadra ha realizzato tre pareggi, anche le altre squadre hanno almeno un pareggio.

(D) La squadra che termina a 6 punti ha due vittorie e una sconfitta. La squadra che termina a 5 punti ha una vittoria e due pareggi. Quindi, nello scontro fra queste due squadre, ha vinto quella che ha concluso a 5 punti.
Di conseguenza, le altre due squadre hanno perso con la prima squadra e pareggiato con la seconda. Resta solo lo scontro diretto fra queste due ultime squadre: se è stato un pareggio, i punteggi sono 2 e 2; se una squadra ha vinto, i punteggi sono 4 e 1.
Ultima domanda. Il punteggio 3 è l'unico ambiguo. Se si tratta di tre pareggi per una squadra, allora abbiamo tre pareggi per tutte le squadre, compresa la quarta, che ha quindi 3 punti.
Se invece per una squadra (e quindi anche per altre due) abbiamo una vittoria e due sconfitte, allora nel girone non ci sono stati pareggi. Dunque la somma dei punteggi è 18 e la quarta squadra ha 9 punti.

2.

(A) L'altezza uscente da A è la medesima nei due triangoli ABM e ACM. Dato che $BM = MC$, si ha quanto richiesto.



(B) Si può ragionare in vari modi. Ad esempio:
- i triangoli $BB'M$ e $CC'M$ sono congruenti per il 2° criterio di congruenza: infatti $BM = MC$ e i due angoli adiacenti sono rispettivamente uguali (dato che BB' e CC', entrambi perpendicolari alla retta r, sono tra loro paralleli); ciò implica che M è anche il punto medio di $B'C'$ e $BB'CC'$ è un parallelogramma;
- altra possibilità: BB' e CC' sono paralleli (entrambi perpendicolari alla retta r) e congruenti (sono le altezze relative al lato AM dei due triangoli equiestesi ABM e ACM); il quadrilatero $BB'CC'$, che ha due lati uguali e paralleli, è dunque un parallelogramma;

(C) Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e solo se gli angoli opposti hanno per somma un angolo piatto. Nel caso dei parallelogrammi, in cui gli angoli opposti sono uguali, ciò avviene solo per i rettangoli. In questo caso, però, non è possibile che $BB'CC'$ sia un rettangolo in quanto gli angoli in B' e in C' sono certamente ottusi.
Un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se le due coppie di lati opposti hanno la stessa somma. Nel caso dei parallelogrammi, in cui i lati opposti sono uguali, ciò avviene solo per i rombi. Ma le due diagonali di $BB'CC'$ non possono essere perpendicolari: se lo fossero, AM sarebbe un'altezza di ABC, che sarebbe quindi isoscele, contro le ipotesi (in tal caso, peraltro, il parallelogramma sarebbe degenere).
Si conclude che il parallelogramma $BB'CC'$ non può essere né inscrivibile né circoscrivibile.

(D) Supponiamo che B' sia interno al triangolo ABC e C' sia esterno. Se $BB'CC'$ e ABC hanno la stessa area, significa che i triangoli CMC' e BAB' sono equiestesi. Pertanto $AB' = B'M = 3$, dunque ABM è isoscele con $AB = BM = 5$. Con il teorema di Pitagora si trova $BB' = 4$, da cui l'area di ABM è $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ e l'area di ABC è 24.
Per trovare AC, si usa il teorema di Pitagora applicato al triangolo $AC'C : \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$. Ne segue che il perimetro è $15 + \sqrt{97}$.

3.

(A) Sviluppando la somma a sinistra ed il prodotto a destra, si riesce a verificare rapidamente che sono uguali.
Si può anche ragionare in questo modo: la somma a sinistra deve essere della forma $\frac{p(x, y, z)}{xyz}$, dove $p(x, y, z)$ è un polinomio di 3° grado omogeneo, che sarà antisimmetrico rispetto alle variabili x, y, z. È immediato osservare che deve aversi $p(x, y, z) = 0$ quando due delle variabili coincidono, ad esempio se $x = y$ (basta guardare cosa accade in tal caso nel membro di sinistra).
Ciò implica che il polinomio $p(x, y, z)$ è divisibile per $x - y$, per $y - z$ e per $z - x$: quindi, a meno di una costante moltiplicativa, esso è proprio uguale al numeratore che compare nel membro di destra. Si tratta solo di vedere che tale costante è -1, cosa che si controlla agevolmente con una sostituzione numerica.

(B) Si verifica che la somma $\frac{-3a}{b-c} + \frac{-3b}{c-a} + \frac{-3c}{a-b}$ rientra tra quelle comprese in (A), ponendo $x = b - c$, $y = c - a$, $z = a - b$, dato che si ha, per esempio, $(c - a) - (a - b) = b + c - 2a = a + b + c - 3a = -3a$, giacché la somma $a + b + c$ è nulla. Lo stesso accade per le altre differenze tra i denominatori. Pertanto possiamo applicare l'identità ottenuta in (A):

$$\frac{-3a}{b-c}+\frac{-3b}{c-a}+\frac{-3c}{a-b} = -\frac{-27abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Dividendo ambo i membri per -3 si ricava la conclusione richiesta.

(C) Riscriviamo l'uguaglianza in (B) in questo modo:

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(-\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\right) = 9.$$

Applicando nuovamente la relazione (A) al secondo fattore dell'espressione di sinistra si ha proprio l'uguaglianza

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right) = 9.$$

A titolo di curiosità, aggiungiamo che la seconda e la terza identità, che valgono sotto la condizione $a+b+c=0$, possono essere generalizzate anche al caso di a, b, c qualsiasi, nel modo seguente:

1. $$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}+\frac{9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{4(a+b+c)(abc)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a+b+c)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

2. $$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)-9 = \frac{(a+b+c)^3}{abc}-4(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Paolo Francini
paolo.francini@gmail.com

Stefano Mortola
ste13251@gmail.com