

BORSE 2008 DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Si è svolto il 9 settembre 2008 il consueto concorso per l'assegnazione di 40 borse di studio a studenti che si immatricolino al corso di laurea triennale in matematica, organizzato dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica. La prova consiste di 10 quesiti a risposta multipla, che assegnano un totale di 50 punti, e 3 problemi dei quali viene richiesto un completo svolgimento, che attribuiscono 20 punti ciascuno. La prova si svolge in maniera decentrata nelle varie sedi universitarie, su un testo preparato da una commissione nazionale che era quest'anno composta dai professori Angelo Alvino, Claudio Bernardi, Alessandro D'Andrea, Stefano Mortola ed Elisabetta Strickland.

I quesiti ed i problemi riguardano argomenti di geometria piana e solida, logica, probabilità, aritmetica, algebra e combinatoria. Hanno partecipato 687 studenti, e la soglia di idoneità – fissata a 50 punti – è stata raggiunta da 336 candidati.

I punteggi conseguiti dai partecipanti sono stati più alti che negli anni passati: su un totale teorico di 110 punti, ben 19 studenti hanno ottenuto un punteggio superiore a 100, mentre i primi ex-aequo hanno fatto registrare un ottimo 108. Per rientrare tra i quaranta assegnatari della borsa è stato necessario ottenere 94 punti; bisogna però ricordare come anche quest'anno siano previste alcune rinunce – negli anni passati sono state in genere una ventina – da parte di candidati che hanno anche ottenuto l'ammissione alle varie scuole di eccellenza italiane.

A partire da questa edizione, la gestione delle borse viene presa in carico dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, che provvede anche a finanziarle; il numero di borse è stato inoltre incrementato di un'unità rispetto a quanto annunciato nel bando.

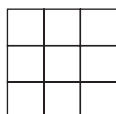
A seguire viene riportato il testo della prova, corredato dalle soluzioni. Sono state sottoposte ai candidati quattro versioni del testo, che differivano nell'ordine dei quesiti. Si ricorda inoltre che raramente un problema ammette un'unica risoluzione, e che quindi quelle riportate vanno considerate semplicemente come proposte di svolgimento.

1. IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in dieci quesiti a risposta multipla ed in tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite nello schema allegato. In ogni quesito a risposta multipla, solo una tra le cinque risposte proposte è esatta. Saranno assegnati: 0 punti per ogni risposta sbagliata, 1,5 punti per ogni risposta non data, 5 punti per ogni risposta esatta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20. La durata della prova è di tre ore. È vietato l'uso di qualsiasi strumento di calcolo.

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Da un quadrato formato da 9 quadretti unitari come in figura anneriamo 2 dei 9 quadretti. Quante configurazioni diverse possono formare i 7 quadratini rimanenti? (Consideriamo uguali due configurazioni se si possono ottenere l'una dall'altra operando con rotazioni o riflessioni.)



- (A) 8
- (B) 9
- (C) 14
- (D) 15
- (E) 18

2. $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ è una funzione *strettamente crescente*, cioè tale che $F(m) > F(n)$ se $m > n$. Essa inoltre soddisfa

$$F(F(k)) \leq F(k+1),$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Sapendo che $F(1000) = 1000$ si può concludere che

- (A) $F(2008)$ è sicuramente uguale a 2008
- (B) $F(2008)$ è sicuramente minore di 2008
- (C) $F(2008)$ è sicuramente maggiore di 2008
- (D) non si può determinare il valore di $F(2008)$, ma esso è 2008 oppure 2009
- (E) le condizioni imposte sono contraddittorie, cioè non esiste alcuna funzione con le proprietà descritte

3. Chiamiamo *minuscolo* ogni numero naturale che sia minore o uguale alla somma dei quadrati delle cifre della sua rappresentazione decimale. Allora

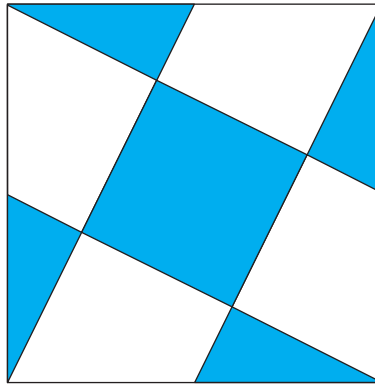
- (A) vi è un numero finito di numeri minuscoli
- (B) vi sono almeno 200 numeri minuscoli
- (C) vi sono almeno 2 numeri minuscoli di quattro cifre
- (D) tutti i naturali, tranne un numero finito di essi, sono minuscoli
- (E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

4. Determinare quante soluzioni reali ha la seguente equazione nella incognita x :

$$|2x - 3| - |x + 1| = 5x - 10$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) infinite

5. L'immagine in figura è ottenuta unendo vertici del quadrato con punti medi dei lati, a partire da un quadrato di lato 10. L'area della regione scura è allora pari a



- (A) $18\sqrt{5}$
- (B) 50
- (C) $10 + 20\sqrt{2}$
- (D) 40
- (E) $24\sqrt{3}$

6. In un'agenzia di scommesse sportive si può scommettere sull'esito di una partita di pallacanestro fra due squadre X ed Y. Si pagano 10 euro per puntare su una squadra e, in caso di vittoria di questa, si ricava un premio in denaro. L'agenzia valuta $\frac{2}{3}$ la probabilità di vittoria della squadra X e $\frac{1}{3}$ la probabilità di vittoria della squadra Y (non è previsto il pareggio). Affinché la scommessa sia equa (cioè non dia un vantaggio né al giocatore né all'agenzia), l'agenzia deve dare come premio

- (A) 12 euro in caso di vittoria di X e 18 euro in caso di vittoria di Y
- (B) 18 euro in caso di vittoria di X e 30 euro in caso di vittoria di Y
- (C) 15 euro in caso di vittoria di X e 40 euro in caso di vittoria di Y
- (D) 12 euro in caso di vittoria di X e 24 euro in caso di vittoria di Y
- (E) 15 euro in caso di vittoria di X e 30 euro in caso di vittoria di Y

7. Sia a una radice del polinomio $p(x)$ e sia b una radice del polinomio $q(x)$. Allora possiamo garantire che $a + b$ è una radice del polinomio

- (A) $p(x) + q(x)$
- (B) $p(x) + q(x) - p(a) - q(a)$
- (C) $p(x-a) + q(x-b)$
- (D) $p(x-b) + q(x-a)$
- (E) $b \cdot p(x) - a \cdot q(x)$

8. Dalle relazioni

$$ab > ac, \quad abc = 0, \quad c > a^2$$

(dove a, b, c sono numeri reali) si può dedurre che

- (A) $b > c$
- (B) $a < 0$
- (C) $b^2 > a^2$
- (D) $c^2 > a^2$
- (E) $a > b$

9. Un commerciante vende un pacco di biscotti a 3 euro. Durante una campagna promozionale « 3×2 », il commerciante vende 3 pacchi al prezzo di 2. Vendendo 3 pacchi al prezzo di 2 il commerciante guadagna di più che vendendo un solo pacco. Se ne può dedurre che il costo in euro di un pacco per il negoziante è

- (A) minore di 1,5
- (B) compreso fra 1,5 e 1,8
- (C) uguale a 1,8
- (D) compreso fra 1,8 e 2
- (E) maggiore di 2

10. Dato un cubo C , sia P la piramide che ha per base una faccia di C e come vertice un vertice della faccia opposta. Il solido che si ottiene «togliendo» la piramide P dal cubo C ha

- (A) 8 facce, di cui 3 triangoli
- (B) 7 facce, di cui 4 quadrati
- (C) 8 facce, di cui 4 quadrati
- (D) 7 facce, di cui 4 triangoli
- (E) 6 facce, di cui 3 triangoli

B) PROBLEMI

1.

- (a) Dette a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo ABC , si determinino i raggi delle tre circonferenze $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$, aventi centro rispettivamente nei vertici A, B, C ,

e a due a due tangenti esternamente: Γ_A e Γ_B in un punto C' del lato AB ; Γ_B e Γ_C in un punto A' del lato BC ; Γ_C e Γ_A in un punto B' del lato CA .

- (b) Note le ampiezze α, β, γ degli angoli del triangolo ABC , determinare le ampiezze degli angoli del triangolo $A'B'C'$.
- (c) Si considerino le seguenti tre rette: la tangente comune alle circonferenze Γ_A e Γ_B nel punto C' , la tangente comune alle circonferenze Γ_B e Γ_C nel punto A' , la tangente comune alle circonferenze Γ_C e Γ_A nel punto B' . Dimostrare che le tre rette passano per uno stesso punto P . Che cosa rappresenta P per il triangolo ABC ? Che cosa rappresenta per il triangolo $A'B'C'$?
- (d) Dopo aver osservato che i quadrilateri $AC'PB'$, $BA'PC'$, $CB'PA'$ sono inscrittibili in circonferenze, si chiamino A^* , B^* , C^* i centri di tali circonferenze. Dimostrare che il triangolo $A^*B^*C^*$ è simile al triangolo ABC .

2. Sia n un intero positivo. Consideriamo i numeri da 1 ad n . Una loro permutazione è una successione (a_1, \dots, a_n) in cui ciascun numero appare una ed una sola volta. Data una permutazione (a_1, \dots, a_n) , consideriamo le *somme parziali* b_1, b_2, \dots, b_n date da

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

- (a) Se $n = 4$ esistono permutazioni (a_1, a_2, a_3, a_4) tali che tutte le somme parziali b_1, b_2, b_3, b_4 siano numeri primi con 3? In caso affermativo, quante sono?
- (b) Esistono permutazioni del tipo descritto per $n = 5$ e $n = 10$?

3. Anna e Bruno fanno un gioco nel quale scelgono a turno un numero naturale. Le regole del gioco sono le seguenti: se il numero N detto da uno dei giocatori è dispari, il successivo numero dell'avversario può essere soltanto $N - 1$; se invece è pari, l'avversario può scegliere liberamente se giocare $N - 1$ oppure $N/2$. Vince chi gioca per primo il numero zero.

Un possibile svolgimento di una partita che inizia con Anna che gioca 10 è ad esempio:

$$A:10, \quad B:9, \quad A:8, \quad B:4, \quad A:3, \quad B:2, \quad A:1, \quad B:0.$$

Il vincitore di tale partita è Bruno. Il numero totale di naturali giocati è detto *lunghezza* della partita. La lunghezza della partita appena illustrata è pertanto 8.

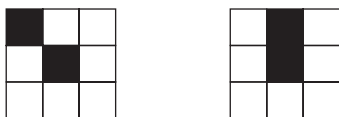
- (a) Se una partita inizia per 13, qual è la lunghezza massima e minima che essa può avere?
- (b) Indicare la lunghezza minima di una partita che inizia con il numero 2008.
- (c) Una partita viene iniziata da Anna, che gioca il numero 6. Da questo punto in poi, i giocatori usano la migliore strategia a propria disposizione. Chi vince la partita?

- (d) Quali sono i numeri naturali che, giocati da Anna come mossa iniziale della partita, le assicurano una strategia vincente?

2. SOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

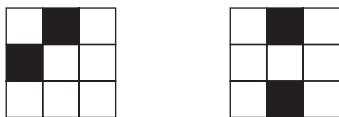
1. La risposta corretta è A. Il modo più semplice di procedere è quello di enumerare tutte le possibili configurazioni, a meno di equivalenza, formate dai 2 quadretti anneriti. Elencheremo le configurazioni iniziando con quelle nelle quali il quadretto centrale è annerito, passando successivamente a quelle nelle quali esso non è annerito, ma almeno un vertice è annerito, e terminando con i casi in cui né il centro né i vertici sono anneriti. Se il quadretto centrale è annerito, le configurazioni possibili, a meno di equivalenza, sono due:



Negli altri casi da considerare, il quadretto centrale non è annerito. Se almeno uno dei vertici lo è, possiamo supporre, a meno di una rotazione, che esso sia quello in alto a sinistra. Abbiamo quindi le seguenti quattro configurazioni: nelle prime due il secondo quadretto nero è ancora un vertice, mentre nelle restanti due è uno spigolo.



Infine, se sono anneriti solo quadretti lungo i lati del quadrato, possiamo supporre che uno dei due sia quello a metà del lato superiore. Otteniamo perciò le due configurazioni:



In totale abbiamo ottenuto otto configurazioni.

2. La risposta esatta è D. Osserviamo innanzitutto che se una funzione strettamente crescente F soddisfa $F(F(k)) \leq F(k+1)$, allora $F(k) \leq k+1$. Poiché

$F(1000) = 1000$, è inoltre vero che $F(k) \geq k$ per ogni $k \geq 1000$ – il valore di una funzione strettamente crescente aumenta di almeno 1 ogni volta che aumentiamo il suo argomento di 1. Di conseguenza il valore di $F(2008)$ è compreso tra 2008 e 2009. È facile ora controllare che le funzioni $F_1, F_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definite da

$$F_1(n) = n \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z},$$

e

$$F_2(n) = \begin{cases} n & \text{se } n < 2000 \\ n+1 & \text{se } n \geq 2000 \end{cases}$$

soddisfano le condizioni richieste. Si verifica immediatamente che $F_1(2008) = 2008$ mentre $F_2(2008) = 2009$.

3. La risposta corretta è A. Intuitivamente, un numero molto grande è sempre maggiore della somma dei quadrati delle sue cifre, e quindi c'è solo un numero finito di numeri minuscoli.

Per rendere rigoroso questo ragionamento, osserviamo che il più piccolo numero con d cifre decimali è 10^{d-1} . Inoltre, se indichiamo con $S(N)$ la somma dei quadrati delle cifre decimali del numero N , ed N è un numero con d cifre decimali, $S(N)$ vale al più $9^2 d = 81d$ – valore che si ottiene quando le cifre sono tutte uguali a 9. Se N è un numero minuscolo con d cifre decimali, deve valere

$$10^{d-1} \leq N \leq S(N) \leq 81d.$$

Questo diventa impossibile non appena $d \geq 4$. Di conseguenza, i numeri minuscoli hanno al più tre cifre, e sono quindi in numero finito. Per la cronaca, vi sono esattamente 52 numeri minuscoli, e il più grande tra essi è 99.

4. La risposta corretta è B. La differenza tra i due membri dell'equazione vale infatti

$$(|2x-3| - |x+1|) - (5x-10) = \begin{cases} 14-6x & \text{se } x \leq -1 \\ 12-8x & \text{se } -1 \leq x \leq 3/2 \\ 6-4x & \text{se } x \geq 3/2 \end{cases}$$

quindi l'unica soluzione dell'equazione è $x = 3/2$.

5. La risposta corretta è D. Innanzitutto, l'area di un quadrato di lato 10 è 100. L'area del quadrato scuro centrale è uguale alla somma delle aree di un triangolo scuro e di un trapezio chiaro, e la sua area è quindi un quinto del totale, cioè 20. Inoltre l'a-

rea di ciascun triangolo scuro è un quarto di quella del quadrato scuro centrale, ed è quindi 5. L'area della regione scura vale quindi $20 + 4 \cdot 5 = 40$.

6. La risposta corretta è E. Supponiamo che, puntando 10 euro sulla squadra X, si ricevano d euro in caso di vittoria di X e 0 altrimenti. Affinché il gioco sia equo, deve valere $10 = d \cdot 2/3 + 0 \cdot 1/3$, e quindi $d = 15$. Ragionando in modo analogo, si vede che il premio da attribuire per la vittoria di Y deve essere uguale a 30.

7. La risposta corretta è D. Sappiamo che $p(a) = 0 = q(b)$. Sostituendo $x = a + b$ nel quarto polinomio si ottiene

$$p(a + b - b) + q(a + b - a) = p(a) + q(b) = 0,$$

quindi $a + b$ è una radice del polinomio $p(x - b) + q(x - a)$.

8. La risposta corretta è B.

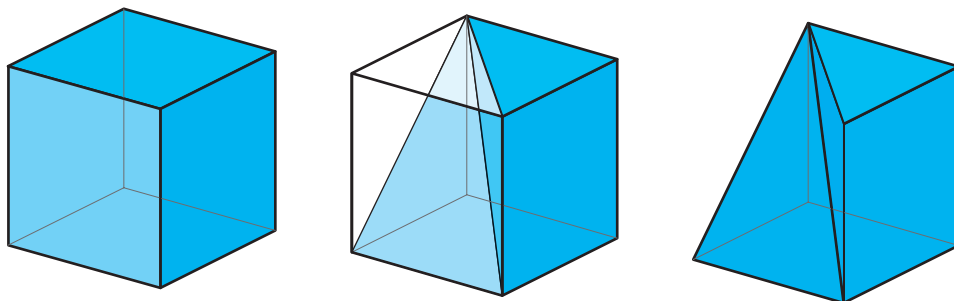
Poiché $abc = 0$, almeno uno tra a , b e c deve valere 0. Sappiamo che c è maggiore di a^2 , ed è quindi positivo e diverso da 0. Inoltre, se a fosse uguale a 0, la prima disuguaglianza diverrebbe $0 > 0$ e sarebbe falsa.

Di conseguenza, b vale 0, e la prima disuguaglianza si riduce a $ac < 0$. Ricordando che c è positivo, si ottiene $a < 0$.

È superfluo, ma istruttivo, osservare che le disuguaglianze A, C ed E sono sempre false, poiché abbiamo ricavato $a < 0$, $b = 0$, $c > 0$; inoltre D è falsa se si scelgono opportunamente i valori di a e c , e non può essere dedotta dalle relazioni date.

9. La risposta corretta è A. Se c è il costo in euro di un pacco di biscotti, si ha $6 - 3c > 3 - c$, da cui si ottiene $2c < 3$ e quindi $c < 3/2$.

10. La risposta corretta è D. Nella figura, abbiamo tolto dal cubo la piramide che ha per base la faccia davanti a sinistra, e per vertice il vertice posteriore della faccia in alto. È chiaro allora che il solido possiede 7 facce: 3 quadrate e 4 triangolari.

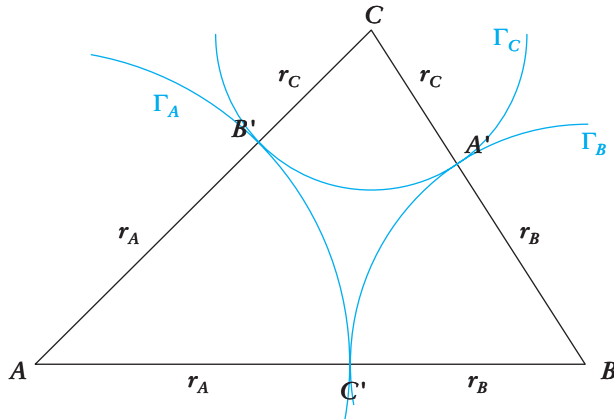


B) PROBLEMI

1.

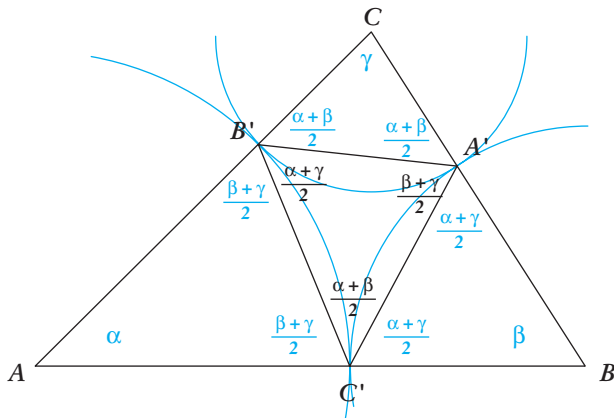
(a) Indicate con r_A, r_B, r_C le lunghezze dei raggi delle tre circonferenze, deve valere

$$\begin{cases} r_A + r_B = c \\ r_B + r_C = a \\ r_C + r_A = b \end{cases}$$



Il sistema ha l'unica soluzione $r_A = (b+c-a)/2$, $r_B = (c+a-b)/2$, $r_C = (a+b-c)/2$. Si noti che tali tre valori sono tutti positivi per la disuguaglianza triangolare, e che il problema ha quindi una soluzione geometricamente sensata.

(b) Il triangolo $AC'B'$ è isoscele, poiché i lati che insistono sul vertice A hanno uguale lunghezza. Gli angoli opposti ad A hanno quindi ampiezza $\widehat{AC'B'} = \widehat{AB'C'} = (\pi - \alpha)/2 = (\beta + \gamma)/2$.



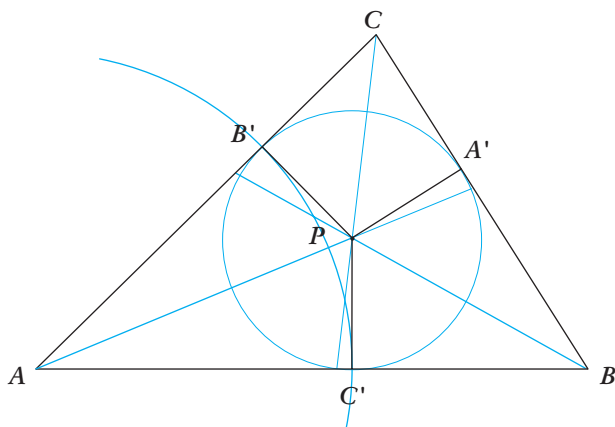
Ragionando in maniera analoga rispetto agli altri vertici, si ottiene anche

$$\widehat{BA'C'} = \widehat{BC'A'} = (\gamma + \alpha)/2, \quad \widehat{CA'B'} = \widehat{CB'A'} = (\alpha + \beta)/2.$$

Gli angoli del triangolo $A'B'C'$ si ottengono adesso per sottrazione:

$$\widehat{A'B'C'} = (\gamma + \alpha)/2, \quad \widehat{B'C'A'} = (\alpha + \beta)/2, \quad \widehat{C'A'B'} = (\beta + \gamma)/2.$$

- (c) È più semplice procedere «alla rovescia», mostrando che l'*incentro* P del triangolo ABC appartiene alle tre tangenti comuni.



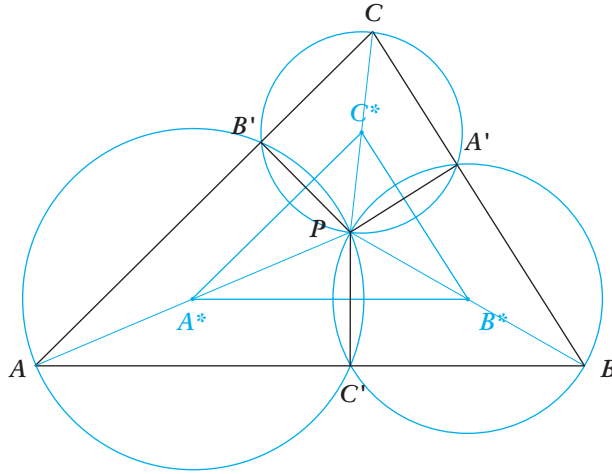
Tracciamo da P le perpendicolari PC' e PB' ai lati AB e AC . I due triangoli APC' e APB' sono uguali, perché hanno il lato AP in comune, i lati PC' e PB' uguali e gli angoli $\widehat{AC'P}$ e $\widehat{AB'P}$ retti. Di conseguenza $\overline{AC'} = \overline{AB'}$. Con un ragionamento analogo si ottiene

$$\overline{BA'} = \overline{BC'}, \quad \overline{CB'} = \overline{CA'},$$

e quindi le circonferenze centrate in A, B, C passanti per B', C', A' sono tangenti esternamente, ed i segmenti PA', PB', PC' giacciono sulle tangenti comuni. In conclusione, P appartiene a tutte e tre le tangenti, e quindi le tre tangenti passano per uno stesso punto.

Per la costruzione fatta, P è l'*incentro* del triangolo ABC . Ma è anche evidentemente il *circocentro* del triangolo $A'B'C'$.

- (d) Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è che la somma degli angoli opposti sia un angolo piatto. I quadrilateri in questione hanno due angoli retti opposti, e soddisfano perciò tale condizione.



I centri A^* , B^* , C^* sono i punti medi dei diametri AP , BP , CP . I triangoli ABC e $A^*B^*C^*$ si corrispondono allora in un'omotetia di centro P e rapporto di proporzionalità $1/2$, e sono pertanto simili.

2.

- (a) La permutazione $(1, 4, 2, 3)$ soddisfa la proprietà richiesta, in quanto nessuna delle somme parziali

$$1, \quad 5 = 1 + 4, \quad 7 = 1 + 4 + 2, \quad 10 = 1 + 4 + 2 + 3$$

è divisibile per 3.

Per contare le permutazioni con la proprietà desiderata, elenchiamole tutte. Innanzitutto è evidente che, se (a_1, a_2, a_3, a_4) è una permutazione del tipo richiesto, a_1 non può essere 3, perché in tal caso la prima somma parziale sarebbe 3. Non può neanche essere uguale a 2, poiché in tal caso l'unica scelta lecita per a_2 sarebbe 3, ed allora la terza somma parziale è sicuramente divisibile per 3.

Pertanto, a_1 vale 1 oppure 4. Come ultima osservazione, notiamo che scambiare 1 con 4 trasforma permutazioni lecite in permutazioni lecite. Possiamo quindi supporre che la permutazioni inizi con 1. Rimangono solo sei permutazioni da considerare, e si verifica facilmente che quelle che soddisfano la proprietà richiesta sono le tre seguenti:

$$(1, 4, 2, 3), \quad (1, 4, 3, 2), \quad (1, 3, 4, 2).$$

A queste tre permutazioni bisogna aggiungere, come già detto, quelle che si ottengono scambiando 1 e 4:

$$(4, 1, 2, 3), \quad (4, 1, 3, 2), \quad (4, 3, 1, 2).$$

Le permutazioni cercate sono quindi sei.

- (b) Per $n = 5$ non vi sono permutazioni con le proprietà richieste. In effetti $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, e quindi l'ultima somma parziale è sicuramente divisibile per 3. Questo mostra, *en passant*, che non vi sono permutazioni del tipo richiesto se n è congruo a 0 oppure a 2 modulo 3, perché in questi casi l'ultima somma parziale è sicuramente multipla di 3.
- Per $n = 10$ vi sono invece permutazioni del tipo richiesto. Una possibile scelta è $(1, 4, 2, 7, 5, 10, 8, 3, 6, 9)$, come si verifica facilmente.

3.

- (a) Le partite che iniziano con 13 sono poche (esattamente 10), e si ricavano distinguendo ad ogni numero pari giocato le possibili scelte:

- 13; 12; 11; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0.
- 13; 12; 11; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 2; 1; 0.
- 13; 12; 11; 10; 9; 8; 7; 6; 3; 2; 1; 0.
- 13; 12; 11; 10; 9; 8; 4; 3; 2; 1; 0.
- 13; 12; 11; 10; 9; 8; 4; 2; 1; 0.
- 13; 12; 11; 10; 5; 4; 3; 2; 1; 0.
- 13; 12; 11; 10; 5; 4; 3; 1; 0.
- 13; 12; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0.
- 13; 12; 6; 5; 4; 2; 1; 0.
- 13; 12; 6; 3; 2; 1; 0.

La lunghezza massima è 14, e si ottiene nella partita nella quale i giocatori sottraggono ogni volta 1, mentre quella minima è 7, e si ottiene nella partita nella quale i giocatori dividono per 2 ogni volta che è possibile.

- (b) La partita più breve è quella nella quale si divide per 2 ogni volta che sia possibile, e quindi la minima lunghezza di una partita che inizia da 2008 è 18, come si verifica calcolando

$$2008; 1004; 502; 251; 250; 125; 124; 62; 31; 30; 15; 14; 7; 6; 3; 2; 1; 0.$$

Tuttavia, l'affermazione che la lunghezza minima si ottenga in questo modo va giustificata! Una maniera semplice, anche se un po' artificiale, è la seguente. Scriviamo il numero naturale N in base 2, indicando con $l(N)$ il numero delle sue cifre binarie e con $u(N)$ il numero delle sue cifre 1. Vogliamo mostrare che il minimo numero di passi necessari a concludere una partita che inizia per N è esattamente $p(N) = l(N) + u(N)$.

Qual è l'effetto delle due mosse possibili sul valore di $p(N)$? Dimezzare un numero pari vuol dire rimuovere la cifra binaria 0 dalla fine del numero. Questo riduce di uno il numero di cifre binarie, ma non cambia il numero di cifre 1. Di conseguenza, dimezzare un numero pari ha come effetto quello di diminuire di 1 il valore di $p(N)$. Ad esempio, dal momento che $12 = 1100_2$ e $6 = 110_2$ si ha $p(12) = 4 + 2 = 6$, mentre $p(6) = 3 + 2 = 5$.

Allo stesso modo, sottrarre 1 ad un numero dispari ha comunque l'effetto di diminuire di uno il valore di $p(N)$. In effetti, se N è dispari, la sua rappresentazione binaria termina con la cifra 1. Sottrarre 1 ha il solo effetto di cambiare tale cifra in 0, mentre il resto del numero, e quindi anche la sua lunghezza, rimane invariato.

È meno ovvio comprendere che cosa accade a $p(N)$ se sottraiamo 1 ad un N pari. Se N termina con esattamente d cifre uguali a zero, tali cifre diventano 1, mentre la cifra immediatamente precedente – che è un 1 – diventa 0. Il numero di cifre 1 aumenta così di $d - 1$. La lunghezza del numero rimane invariata, a meno che l'unica cifra 1 sia la prima del numero, e quindi N sia una potenza di 2: in tal caso, la lunghezza diminuisce di uno. In conclusione, quando N è pari e termina con d cifre 0, $p(N - 1) = p(N) + d - 2$ se N è una potenza di 2, e $p(N - 1) = p(N) + d - 1$ altrimenti.

Poiché un numero pari termina con almeno una cifra uguale a zero, d è sempre almeno 1, e quindi $p(N - 1)$ è sempre maggiore o uguale a $p(N)$, con l'unica eccezione che si ottiene quando N è una potenza di 2 e $d = 1$. In tal caso, però, $N = 2$, e sottrarre 1 ha lo stesso effetto di dividere per 2.

Concludendo: il nostro obiettivo è quello di arrivare ad $N = 0$, che ha il valore minimo di $p(N)$, il prima possibile. Sottrarre uno ai numeri dispari e dividere quelli pari per 2 fa diminuire il valore di $p(N)$, mentre ogni altra scelta lo aumenta, o al più lo mantiene uguale. Questo dimostra innanzitutto che la partita più breve si ottiene dimezzando ogni volta che sia possibile; ma più precisamente ci dice che la minima lunghezza della partita che inizia per N è proprio $p(N)$. In effetti in tale partita il valore assunto da p sul primo numero giocato è $p(N)$, quello assunto sul numero finale è $p(0) = 1$, e tale valore diminuisce di 1 ad ogni numero giocato. Vengono quindi giocati esattamente $p(N)$ numeri.

Dal momento che $2008 = 11111011000_2$ possiede 11 cifre binarie, delle quali 7 sono uguali ad 1, $p(2008) = 11 + 7 = 18$, confermando la risposta inizialmente data.

(c) Bruno ha la strategia vincente descritta da:

$$A : 6; \quad B : 5; \quad A : 4; \quad B : 2; \quad A : 1; \quad B : 0.$$

Le mosse di Anna sono tutte forzate, perché 5 è dispari, e le due mosse possibili hanno lo stesso effetto su 2.

(d) Se Anna inizia la partita con un numero pari maggiore o uguale a 4, Bruno possiede una strategia vincente analoga a quella della domanda precedente: sottrae 1 al numero pari detto da Anna, che ricevendo un numero dispari può rispon-

dere soltanto sottraendo uno. La partita continua in questo modo fino a quando Anna gioca il 4, e termina la partita con $B : 2; A : 1; B : 0$, vincendola. In tale partita Anna non può opporsi alla strategia di Bruno perché tutte le sue mosse sono forzate.

Viceversa, se Anna inizia la partita con un numero dispari maggiore o uguale a 5, Bruno si trova immediatamente nella situazione appena descritta, e quindi perde. Ricapitolando, se il primo numero giocato da Anna vale almeno 4, esso è vincente se dispari, e perdente se pari.

La situazione si rovescia per i numeri piccoli. Se il numero iniziale di Anna è minore di 4, l'unica partita possibile è quella in cui si sottrae ogni volta 1. Di conseguenza 2 e 0 sono vincenti e 3 ed 1 perdenti.

In conclusione, i numeri iniziali che garantiscono ad Anna una strategia vincente sono 0, 2 ed i dispari da 5 in poi.

Alessandro D'Andrea

Dipartimento di Matematica
Università di Roma «La Sapienza»
dandrea@mat.uniroma1.it
