BORSE 2011/2012 DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Da oltre un decennio, all'inizio di ogni mese di settembre, si svolge la prova nazionale per assegnare le borse di studio bandite dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM), destinate agli studenti che si iscrivono al primo anno dei Corsi di Laurea in Matematica. Per l'anno accademico 2011/2012, la prova si è tenuta il giorno 8 settembre 2011, con la partecipazione di 604 candidati. Hanno fatto parte della Commissione Giudicatrice Angelo Alvino (presidente), Claudio Bernardi, Corrado Falcolini, Paolo Francini, Elisabetta Strickland.

La fisionomia della prova, non diversa da quella dello scorso anno, prevede una batteria di 10 quesiti (7 a risposta multipla, 3 a risposta numerica «secca») e 3 problemi a carattere dimostrativo. Il tempo a disposizione è stato incrementato, di mezz'ora, in modo da concedere maggiore possibilità di riflessione in una prova senz'altro molto impegnativa. I contenuti riguardano aree, almeno sulla carta, comuni ai diversi corsi di istruzione secondaria superiore: geometria, algebra, aritmetica, combinatoria e probabilità. I tre problemi assegnati presentano una struttura graduale, pensata per guidare il lavoro dello studente attraverso tappe successive. Più che conoscenze avanzate o complesse, si tratta di una prova mirante a valutare la capacità di organizzare corretti ragionamenti fondati su conoscenze matematiche di base.

L'andamento della prova ha messo in evidenza aspetti in linea con quanto costantemente già emerso nell'arco dell'ultimo decennio. Ad esempio:

- forte differenziazione dei risultati su base territoriale (con risultati nettamente migliori nelle sedi del Nord rispetto al Sud);
- squilibrio di genere nella fascia di punteggio più elevata (1 sola ragazza nei primi 40 classificati, 8 nei primi 80, 22 nei primi 120), a fronte di una partecipazione grosso modo paritaria.

Nella valutazione della prova, si è rilevato, ancora una volta, un notevole affanno nei problemi dimostrativi: i punteggi medi in ognuno di essi sono stati di circa 5 punti su 20. Anche tenendo conto delle obiettive difficoltà presenti nei compiti proposti (probabilmente più elevate che in altri anni), permane la sensazione di una troppo povera pratica dimostrativa acquisita nei corsi di studio, che finisce per rendere una prova come questa inavvicinabile per gran parte degli studenti, compresi molti dei migliori (anch'essi pagano lo scotto di questo stato di cose).

Tra i quesiti, il più semplice è risultato il n. 1 (logica, 72% di risposte esatte), mentre fra i più difficili ci sono stati il n. 6 (probabilità, 18% di risposte esatte), e il n. 5 (geometria, 16% di risposte esatte e ben il 61% di omissioni). Nella graduatoria finale, 8 studenti hanno realizzato almeno 100 punti su 110, mentre il 40-esimo (ultima posizione utile per la borsa di studio) ha ottenuto 68,8/110 e l'80-esimo (ultima posizione per il premio una tantum di 500 euro) 50,2/110. Ben 305 candidati su 604 hanno realizzato meno di 26 punti su 110: un dato certo non esaltante, anche tenuto conto della difficoltà della prova, considerato che gli aspiranti alla borsa di studio provengono in massima parte dalla fascia «alta» degli studenti diplomati.

Da notare che una buona decina dei primi 20 classificati sono risultati al contempo vincitori di altre borse di studio o di posti in collegi universitari d'eccellenza. Se questo elemento può confortare circa la complessiva attendibilità della prova proposta e della sua valutazione, d'altro canto il divieto di cumulo delle borse, stabilito dal bando di concorso, ha comportato svariate rinunce da parte dei vincitori. A ciò non è però conseguito alcuno scorrimento a vantaggio dei candidati nelle posizioni successive: l'Istituto non ha proceduto, infatti, ad alcuna surroga a seguito delle rinunce. Le borse realmente erogate sono quindi un numero sensibilmente minore delle 40 preventivate.

Sfugge, in tutta onestà, la motivazione che possa giustificare la scelta di non assegnare circa un quarto delle borse previste (data per scontata la rispettiva copertura finanziaria), dopo che tanti giovani si sono sobbarcati una prova così impegnativa. Difficile invocare la penuria di candidati meritevoli. Senz'altro più lineare nei confronti dei giovani partecipanti sarebbe apparsa la scelta di mettere in palio, fin dal principio, un minor numero di borse, assegnandole realmente, anziché trincerarsi dietro le prevedibili rinunce di alcuni dei vincitori.

1. IL TESTO DELLA PROVA

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema allegato nell'apposito foglio. È ammesso l'uso della riga e del compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di ***tre ore e mezza.***

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 *punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);*
- 1,5 *punti in caso di risposta mancante;*
- 5 *punti in caso di risposta esatta.*

1. L'affermazione «lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto almeno due esami» è falsa. Questo significa che...

(A) lo scorso anno nessuno studente ha sostenuto almeno due esami

(B) lo scorso anno tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame
(C) lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto non più di due esami
(D) lo scorso anno non tutti gli studenti hanno sostenuto al più un esame
(E) lo scorso anno almeno uno studente ha sostenuto al più un esame

2. Sapendo che h è un numero reale tale che $\frac{1}{h} < h < -h$, disporre in ordine crescente i numeri:

$$0,\ 1,\ h,\ h^2,\ -h^2.$$

(A) $-h^2 < h < 0 < h^2 < 1$
(B) $-h^2 < 0 < 1 < h < h^2$
(C) $-h^2 < h < 0 < 1 < h^2$
(D) $h < -h^2 < 0 < 1 < h^2$
(E) $h < -h^2 < 0 < h^2 < 1$

3. Nella piramide $VABC$, la base ABC è un triangolo rettangolo in B e lo spigolo VA è perpendicolare al piano di ABC. Si sa che il volume è 160 cm^3, che $BC = 5$ cm, che $VB = 20$ cm. Qual è il perimetro della faccia VAB?

(A) 52 cm
(B) 48 cm
(C) 45 cm
(D) 72 cm
(E) 60 cm

4. Quanti sono i polinomi non nulli $f(x)$ di 2° grado, che si annullano per $x = 3$ e per $x = 4$, i cui coefficienti sono numeri interi relativi tutti minori di 100?

(A) Nessuno
(B) 1
(C) 8
(D) 22
(E) Infiniti

5. In un triangolo di lati $AB = 20$, $BC = 20$, $AC = 24$, si traccia una semicirconferenza, il cui diametro DE è contenuto nel lato BC, in modo che essa sia tangente ai lati AB e AC. Quanto misura DE?

(A) $\frac{52}{3}$

(B) $\frac{96}{5}$

(C) $\frac{122}{7}$

(D) $\frac{192}{11}$

(E) $\frac{225}{13}$

6. Ciascun lato dell'esagono $ABCDEF$ viene colorato a caso, con eguali probabilità, di rosso o di blu. Qual è la probabilità che dal vertice A si possa giungere fino al vertice E percorrendo lati di un medesimo colore?

(A) $\frac{7}{8}$

(B) $\frac{9}{16}$

(C) $\frac{11}{16}$

(D) $\frac{5}{8}$

(E) $\frac{1}{2}$

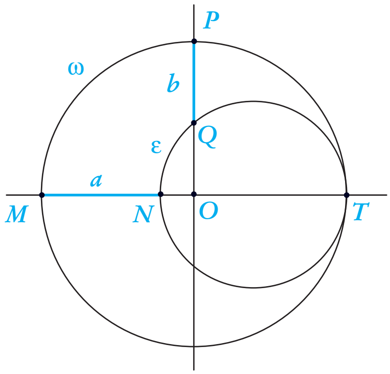
7. Quale fra le seguenti proprietà non vale per tutti i triangoli rettangoli?

(A) Ortocentro, incentro e circocentro sono allineati
(B) Le due bisettrici degli angoli acuti formano un angolo di 135°
(C) L'ortocentro coincide con un vertice
(D) L'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili
(E) Baricentro, ortocentro e circocentro sono allineati

B) QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 *a* 10, *la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:*

- 0 *punti per ogni risposta errata;*
- 0 *punti per ogni risposta non data;*
- 5 *punti per ogni risposta esatta.*



8. Nella figura qui sopra, la circonferenza ε è tangente internamente alla circonferenza ω nel punto T ed il punto O è il centro di ω.
Sappiamo inoltre che Q è un vertice del quadrato inscritto in ε avente due lati paralleli e due ortogonali a NT. Quanto vale il rapporto $\dfrac{100a^2}{b^2}$ (dove $a = MN$ e $b = PQ$)?

9. Consideriamo un insieme A di 8 elementi. Si trovi il numero massimo di sottoinsiemi di A, ciascuno formato da 3 elementi, che è possibile scegliere in modo che l'intersezione tra due qualsiasi di essi non sia mai un insieme di 2 elementi.

10. Qual è l'unico intero positivo n tale che il numero $2^{2011} + 2^{2008} + 2^n$ è il quadrato di un intero?

C) PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, motivando adeguatamente tutte le risposte. Il candidato può servirsi degli enunciati contenuti nel testo di un problema, dei quali sia richiesta la dimostrazione, per affrontare le parti successive del problema stesso, anche nel caso non abbia svolto la dimostrazione richiesta. Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 *a* 20.

1. Dopo aver disegnato un poligono convesso $\mathcal{P}$ con 100 lati, Anna e Bruno fanno questo gioco: a turno, a partire da Anna, ciascuno dei due traccia una diversa diagonale di $\mathcal{P}$ a sua scelta, con la condizione che essa non tagli nessuna delle diagonali già tracciate (in un punto interno a $\mathcal{P}$). Perde chi non può più tracciare diagonali quando è il suo turno.

(A) In quante regioni sarà diviso $\mathcal{P}$ al termine della partita?
(B) Chi vincerà in questo gioco?

(C) Dimostrare che, al termine della partita, vi saranno almeno due regioni ciascuna delle quali ha nel proprio bordo una coppia di lati di $\mathcal{P}$ consecutivi.
(D) Al termine della partita, quante potranno essere al più le regioni senza lati in comune con $\mathcal{P}$?

2.
(A) Si dimostri che, se l'intero positivo n non è primo, allora anche $2^n - 1$ non è primo.
(B) Si dimostri che, se n è divisibile per 3, allora $2^n - 1$ è divisibile per 7.
(C) Si dimostri che, se $2^n - 1$ è divisibile per 7, allora n è divisibile per 3.
(D) Determinare tutti gli interi positivi n tali che $2^{n-1} - 1$ e $2^{n+1} - 1$ sono primi e $2^n - 1$ non è divisibile per 7 (si ricorda che 1 non è considerato numero primo).

3. Fissata una circonferenza δ e dato un triangolo ABC inscritto in δ, si indichino con A', B', C' i punti medi degli archi BC, CA, AB. Chiameremo $A'B'C'$ il triangolo derivato di ABC.

(A) Dimostrare che, dette α, β, γ le ampiezze degli angoli del triangolo ABC, le ampiezze degli angoli di $A'B'C'$ sono $\frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\gamma+\alpha}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}$.
(B) È vero che, dati due triangoli $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ inscritti in δ, i loro derivati $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{T}'$ sono uguali se e solo se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono uguali? È vero che, per ogni triangolo $\mathcal{T}$ inscritto in δ, esiste un triangolo il cui derivato è $\mathcal{T}$?

Sia ora $EFGH$ un quadrilatero inscritto nella circonferenza δ. Chiameremo derivato di $EFGH$ il quadrilatero che ha per vertici i punti medi degli archi EF, FG, GH, HE.

(C) Quali quadrilateri inscritti in δ hanno per derivato un rettangolo? Quali rettangoli possono essere i derivati di un quadrilatero?
(D) Dimostrare che un quadrilatero $\mathcal{K}$ iscritto in δ è il derivato di un quadrilatero se e solo se gli archi sottesi dai lati opposti di $\mathcal{K}$ hanno somma pari alla metà della circonferenza δ.

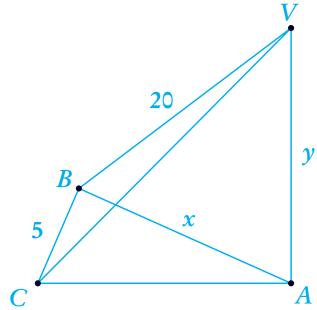
2. SOLUZIONI

A) QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1. Risposta: E,
la sola che equivale alla negazione della frase indicata.

2. Risposta: E.
Il fatto che $h < -h$ significa che $h < 0$. Il fatto che $h > \frac{1}{h}$ comporta allora che $-1 < h < 0$. Pertanto si ha $h < -h^2 < 0 < h^2 < 1$.

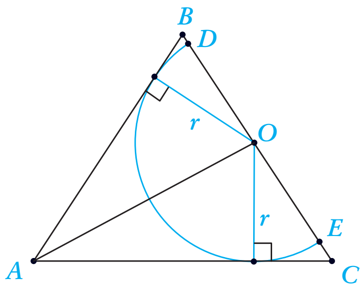
3. Risposta: B.
Indichiamo con x e y le misure in cm degli spigoli AB e AV. Il volume corrisponde dunque a $\frac{1}{3} \cdot y \cdot \frac{5x}{2}$ e $VB^2 = x^2 + y^2$.



Pertanto si ha $xy = 192$ e $x^2 + y^2 = 400$, da cui $(x + y)^2 = 400 + 2 \cdot 192 = 784$, ossia $x + y = 28$. Il perimetro di ABV è quindi di 48 cm. Risolvendo il sistema simmetrico, si può anche trovare che $\{x, y\} = \{12, 16\}$, senza tuttavia poter stabilire univocamente i valori di x e di y: ambedue le possibilità sono compatibili con le informazioni date.

4. Risposta: D.
Un polinomio non nullo di 2° grado che si annulli per $x = 3$ e per $x = 4$ dovrà essere della forma $f(x) = K(x - 3)(x - 4) = K(x^2 - 7x + 12) = Kx^2 - 7Kx + 12K$, con $K \neq 0$. Per $K > 0$, dobbiamo perciò avere $12K < 100$, ossia $K \leq 8$. Per $K < 0$, occorre che sia $-7K < 100$, ossia $K \geq -14$. In tutto ci sono dunque 22 valori accettabili di K, corrispondenti a 22 diversi polinomi che soddisfano le condizioni richieste.

5. Risposta: D.
Il centro O della semicirconferenza è equidistante dai lati AB e AC, dal momento che ambedue le distanze coincidono con il raggio r della semicirconferenza (O è dunque il punto dove la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ taglia il lato BC). Le aree dei triangoli ABO e ACO sono quindi, rispettivamente $\frac{r \cdot AB}{2}$ e $\frac{r \cdot AC}{2}$, cosicché l'area S del triangolo vale $S = \frac{r \cdot (AB + AC)}{2}$: ossia $r = \frac{2S}{AB + AC}$.



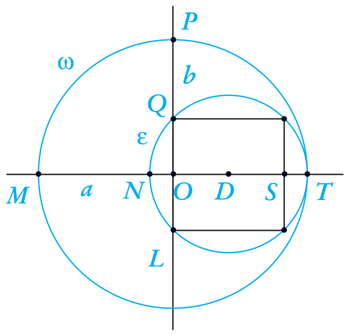
Per determinare l'area S, calcoliamo con il teorema di Pitagora l'altezza BH relativa al lato AC. Si ha $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Risulta dunque: $2S = 16 \cdot 24 = 384$ e $r = \frac{384}{44} = \frac{96}{11}$. Il diametro DE misura pertanto $\frac{192}{11}$.

6. Risposta: B.
Calcoliamo dapprima la probabilità complementare, ossia che dal vertice A *non* si possa raggiungere E. Ciò significa che nessuno dei due cammini $ABCDE$ e AFE è monocromatico. La probabilità che $ABCDE$ sia monocromatico è $\frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}$ (delle 2^4 possibili colorazioni, 2 sono quelle monocromatiche). La probabilità che AFE sia monocromatico è $\frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$ (delle 2^2 possibili colorazioni, 2 sono quelle monocromatiche). La probabilità che nessuno dei due cammini sia monocromatico è perciò $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$. La probabilità cercata (che almeno uno dei due cammini sia monocromatico) è pertanto $1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$.

7. Risposta: A.
L'ortocentro coincide con il vertice dell'angolo retto, mentre il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa. Se l'incentro fosse allineato con questi punti, poiché esso giace sulla bisettrice dell'angolo retto, tale bisettrice dovrebbe coincidere con la mediana relativa all'ipotenusa. Ciò avviene solo se il triangolo è isoscele, non per tutti i triangoli rettangoli. Le altre 4 proposizioni sono invece vere per tutti i triangoli rettangoli, com'è agevolmente verificabile.

B) QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

8. Risposta: 200.
Mostriamo che $b = DQ$ (raggio di ε) e $a = LQ$ (lato del quadrato inscritto in ε). Infatti $b = OP - OQ = OT - OD = DT = DQ$ e $a = OM - ON = OT - ST = OS = LQ$.
Pertanto si ha $\frac{a}{b} = \frac{LQ}{DQ} = \sqrt{2}$ e dunque $\frac{100a^2}{b^2} = 200$.



9. Risposta: 8.

Sia $\mathcal{T}$ una collezione di terne formate da elementi di A, avente la proprietà che, per $T, T' \in \mathcal{T}$ con $T \neq T'$, si ha $\mathrm{Card}(T \cap T') < 2$. Osserviamo che nessuno degli elementi di A può appartenere a più di 3 delle terne in $\mathcal{T}$: se esistesse un elemento a comune a 4 terne, in A dovrebbero esserci altri 8 elementi oltre ad a (giacché due qualsiasi di tali terne dovrebbero avere in comune il solo elemento a), il che non è possibile. Ciò prova che nessun elemento di A può appartenere a più di 3 terne di $\mathcal{T}$. Perciò, indicando con n_a (per $a \in A$) il numero delle terne di $\mathcal{T}$ contenenti a, si avrà $\sum_{a \in A} n_a \leq 3 \cdot 8 = 24$. Ciò implica che le terne in $\mathcal{T}$ non possono essere più di 8: infatti la somma $\sum_{a \in A} n_a$ coincide con $\sum_{T \in \mathcal{T}} \mathrm{Card}(T) = 3 \cdot \mathrm{Card}(\mathcal{T})$.

Per vedere che è in effetti possibile scegliere 8 terne siffatte in un insieme con 8 elementi, assumiamo che sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ad esempio, la collezione di 8 terne $\mathcal{T} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 6, 8\}, \{3, 4, 7\}, \{5, 7, 8\}\}$ soddisfa in effetti le condizioni richieste.

10. Risposta: 2012.

Il testo afferma che esiste un unico intero n nelle condizioni volute: è allora spontaneo cercare nell'espressione data il quadrato di un binomio. In tal caso 2^{2011} deve essere il doppio prodotto, mentre 2^{2008} è il quadrato di 2^{1004} e 2^n è l'altro quadrato. Si ha dunque: $2^{2011} = 2 * 2^{1004} * 2^{n/2}$ da cui $2011 = 1 + 1004 + n/2$, ossia $n = 2012$.
Per provare l'effettiva unicità della soluzione trovata, possiamo procedere così. Notiamo intanto che $2^{2011} + 2^{2008} + 2^n = 8 \cdot 2^{2008} + 2^{2008} + 2^n = 9 \cdot 2^{2008} + 2^n$. Bisogna cercare per quali interi positivi n si tratta di un quadrato. Distinguiamo i due casi possibili.

- Per $n < 2008$, si ha $9 \cdot 2^{2008} + 2^n = 2^n \cdot (9 \cdot 2^{2008-n} + 1)$. Dato che $9 \cdot 2^{2008-n} + 1$ è dispari per $n < 2008$, i fattori 2^n e $9 \cdot 2^{2008-n} + 1$ sono primi tra loro: perché il loro prodotto sia un quadrato, entrambi dovranno essere a loro volta dei quadrati. Dunque n deve essere pari, per cui anche $9 \cdot 2^{2008-n}$ è un quadrato. Gli interi positivi $9 \cdot 2^{2008-n}$ e $9 \cdot 2^{2008-n} + 1$ sarebbero allora quadrati che differiscono di 1. Ma non esistono quadrati positivi che differiscano da 1: si conclude che non vi sono soluzioni con $n < 2008$.
- Per $n \geq 2008$, si ha $9 \cdot 2^{2008} + 2^n = 2^{2008} \cdot (9 + 2^{n-2008})$. Essendo 2^{2008} un quadrato, per ottenere il quadrato richiesto è necessario e sufficiente che anche $9 + 2^{n-2008}$ sia un quadrato, cioè $9 + 2^{n-2008} = k^2$ con k intero positivo, vale a dire $(k-3)(k+3) = 2^{n-2008}$. I fattori $k - 3$ e $k + 3$ dovranno coì essere due potenze di 2 che differiscono di 6. L'unica coppia siffatta è data da 2 e 8 (da 2^3 in avanti la differenza tra due potenze di 2 è almeno 8). Pertanto si deve avere $k - 3 = 2$ e $k + 3 = 8$, ossia $k = 5$ e $2^{n-2008} = 16$. Quindi $n - 2008 = 4$ e $n = 2012$, l'unica soluzione esistente. Per tale scelta di n si ha $2^{2011} + 2^{2008} + 2^{2012} = 25 \cdot 2^{2008} = (5 \cdot 2^{1004})^2$.

C) PROBLEMI

1.

(A) Al termine della partita, tutte le regioni dovranno essere dei triangoli (se una delle regioni non è triangolare, si può tracciare una diagonale al suo interno, dunque la partita non è conclusa). Gli angoli delle regioni ottenute sono tutti contenuti in angoli di $\mathcal{P}$. Pertanto la somma degli angoli di ciascuna delle regioni contribuisce per un angolo piatto alla somma degli angoli di $\mathcal{P}$, che è pari a 98 angoli piatti. Quindi, al termine della partita, $\mathcal{P}$ sarà diviso in 98 parti.

(B) Per suddividere $\mathcal{P}$ in 98 parti servono esattamente 97 diagonali. Questo può essere provato in varie maniere.
Ad esempio si può procedere così: il poligono $\mathcal{P}$ ha inizialmente 1 sola regione. Ogni volta che si traccia una nuova diagonale il numero delle regioni aumenta di 1: non potendo tagliare nessuna delle diagonali già tracciate, la nuova diagonale sarà tutta contenuta in una delle regioni esistenti in quel momento e la dividerà in due parti, incrementando di 1 il numero di regioni esistenti. Per raggiungere il totale di 98 regioni serviranno quindi 97 diagonali.
Un'altra possibile argomentazione è questa: detto d il numero delle diagonali tracciate al termine della partita, si ha $3 \cdot 98 = 100 + 2d$ (sommando i 3 lati di ogni regione si contano una volta i 100 lati di $\mathcal{P}$ e due volte ciascuna diagonale), da cui $d = 97$.
Un'ulteriore possibilità è applicare la relazione di Eulero sui grafi planari connessi, ossia $v - s + f = 2$, dove v è il numero di vertici, s il numero di spigoli (in questo caso i lati di $\mathcal{P}$ e le diagonali tracciate), f il numero di facce (le regioni delimitate in $\mathcal{P}$ e quella illimitata complementare a $\mathcal{P}$). Ossia $100 - (100 + d) + 99 = 2$, da cui $d = 97$.
Visto che la partita durerà in ogni caso 97 mosse, l'ultima mossa verrà effettuata da chi ha iniziato, ossia Anna, qualunque siano le mosse decise dai giocatori.

(C) Una volta conclusa la partita, con il poligono $\mathcal{P}$ suddiviso in 98 regioni, possiamo definire un'applicazione f dall'insieme dei lati di $\mathcal{P}$ all'insieme delle regioni ottenute, semplicemente facendo corrispondere ad ogni lato la sola regione ad esso adiacente. Dal momento che i lati sono 100 e le regioni 98, vi dovrà essere o una terna di lati adiacenti alla medesima regione o almeno 2 diverse coppie di lati adiacenti a 2 diverse regioni. Ma nessuna regione può confinare con 3 dei lati di $\mathcal{P}$. Segue che dovranno esserci almeno 2 regioni, ciascuna con 2 lati di $\mathcal{P}$. Tali lati dovranno essere consecutivi (altrimenti la regione corrispondente dovrebbe avere più di 3 lati).

(D) Possiamo avere fino a 48 regioni senza lati in comune con $\mathcal{P}$. Vediamo come ottenere una configurazione siffatta. A partire da un vertice A_0, basta congiungere A_0 con A_2, quindi A_2 con A_4, poi A_4 con A_6, e così via (dove A_0, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{99}$ indicano nell'ordine i vertici di $\mathcal{P}$, muovendosi da A_0 in uno dei due versi). In questo modo le 50 regioni $A_0A_1A_2$, $A_2A_3A_4$, $A_4A_5A_6$,

… $A_{98}A_{99}A_0$ sono le sole, tra le 98 complessive, a confinare con qualche lato di $\mathcal{P}$: le altre 48 non confinano con nessuno di essi.
Vediamo anche che non si può fare meglio, nel senso che non possono esserci più di 48 regioni prive di lati di $\mathcal{P}$: in caso contrario, infatti, i 100 lati di $\mathcal{P}$ dovrebbero confinare con meno di 50 regioni al termine della partita, il che comporterebbe che qualche regione dovrebbe confinare con più di 2 lati di $\mathcal{P}$: impossibile.

2.

(A) Se $n = a \cdot b$, dove $a > 1$ e $b > 1$, allora si ha:

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\,((2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-3} + \ldots + 1).$$

È immediato che, in tal caso, i due fattori interi ottenuti sono entrambi maggiori di 1, pertanto si è ricavata una scomposizione di $2^n - 1$ in fattori maggiori di 1: il numero $2^n - 1$ non è primo.

(B) Sia $n = 3k$. Allora si ha:

$$2^n - 1 = (2^3)^k - 1 = (2^3 - 1)\,((2^3)^{k-1} + (2^3)^{k-2} + \ldots + 1) = 7 \cdot (8^{k-1} + 8^{k-2} + \ldots + 1).$$

Perciò 7 divide $2^n - 1$.

Lo stesso ragionamento si può esprimere più sinteticamente nel linguaggio delle congruenze: poiché $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, si ha $2^{3k} \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 7$, da cui segue che $2^{3k} - 1 \equiv 0 \pmod 7$: ossia $2^{3k} - 1$ è divisibile per 7.

(C) Supponiamo che n non sia multiplo di 3; facciamo vedere che, in tal caso, $2^n - 1$ non è multiplo di 7. Se n non è multiplo di 3, allora è della forma $3k + 1$ oppure $3k + 2$.
Supponiamo $n = 3k + 1$. In tal caso si ha:

$$2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{3k} - 1 = 2 \cdot (2^{3k} - 1) + 2 - 1 = 2 \cdot (2^{3k} - 1) + 1$$

che non è multiplo di 7, poiché supera di 1 un multiplo di 7.
Se invece $n = 3k + 2$, si ha:

$$2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 2^{3k} - 1 = 4 \cdot (2^{3k} - 1) + 4 - 1 = 2 \cdot (2^{3k} - 1) + 3.$$

Anche questo numero non è multiplo di 7, visto che supera di 3 un multiplo di 7.

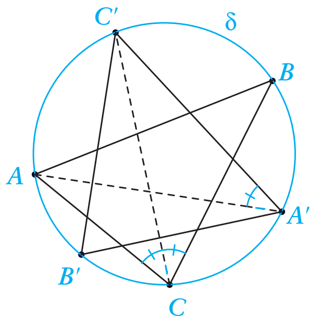
Nel linguaggio delle congruenze, tutto ciò si può formulare come segue: dato che $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$, si ha che $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$ e $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$, ossia $2^{3k+1} - 1 \equiv 1 \pmod 7$ e $2^{3k+2} - 1 \equiv 3 \pmod 7$.

(D) Affinché $2^{n-1} - 1$ e $2^{n+1} - 1$ siano primi, occorre che $n - 1$ e $n + 1$ siano primi, come si è visto nella parte (A). Il fatto che $2^n - 1$ non sia divisibile per 7 significa che n non è multiplo di 3 (parti (B) e (C)).

Se $n = 3k+1$, allora $n-1$ deve essere un numero primo multiplo di 3, ossia $n-1=3$, da cui $n=4$. In tal caso $2^{n-1}-1=7$ e $2^{n+1}-1=31$: dunque $n=4$ soddisfa le condizioni richieste.
Se $n=3k+2$, allora $n+1$ deve essere un numero primo multiplo di 3, ossia $n+1=3$, da cui $n=2$. In tal caso $2^{n-1}-1=1$ e $2^{n+1}-1=7$, dunque $n=2$ non soddisfa le condizioni richieste, giacché 1 non è un numero primo.
L'unica soluzione è pertanto $n=4$.

3.

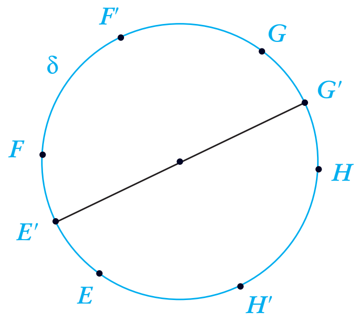
(A) Gli angoli $A\widehat{C}C'$ e $B\widehat{C}C'$ sono uguali, dato che insistono sugli archi uguali $\overset{\frown}{AC'}$ e $\overset{\frown}{C'B}$, ossia hanno ambedue ampiezza $\frac{\gamma}{2}$, dove $\gamma = B\widehat{C}A$. Inoltre anche gli angoli $A\widehat{C}C'$ e $A\widehat{A'}C'$ sono uguali, insistendo sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC'}$. Perciò $A\widehat{A'}C' = \frac{\gamma}{2}$. Allo stesso modo, si ha $A\widehat{A'}B' = \frac{\beta}{2}$, dove $\beta = A\widehat{B}C$, dunque $B'\widehat{A'}C' = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Le cose vanno in modo analogo per gli altri due angoli di $A'B'C'$.



(B) La prima affermazione «dati due triangoli $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ inscritti in δ, i loro derivati $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{T}'$ sono uguali se e solo se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono uguali» è vera.
Intanto è evidente che, se $\mathcal{S}=\mathcal{T}$, si ha $\mathcal{S}'=\mathcal{T}'$.
Vediamo che vale anche il viceversa.
Supponiamo $\mathcal{S}'=\mathcal{T}'$. Siano α, β, γ gli angoli di $\mathcal{S}$ e x, y, z gli angoli di $\mathcal{T}$.
Per quanto visto, a meno della scelta di x, y, z, si deve avere $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{x+y}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{y+z}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}=\frac{z+x}{2}$. Risolvendo rispetto a x, y, z, si ottiene $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$. I triangoli $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono quindi simili, avendo angoli a due a due uguali. Ma poiché $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono inscritti nella medesima circonferenza δ, essi debbono in conclusione essere uguali.

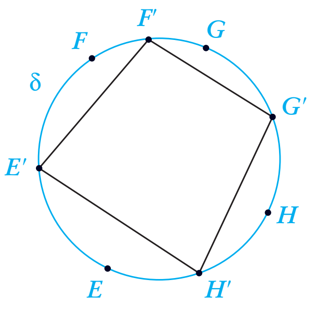
La seconda affermazione «per ogni triangolo $\mathcal{T}$ inscritto in δ, esiste un triangolo il cui derivato è $\mathcal{T}$» è falsa: dal momento che gli angoli di un triangolo derivato da un altro sono $\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\gamma+\alpha}{2}$ (dove α, β, γ sono gli angoli del triangolo iniziale), un triangolo derivato è necessariamente acutangolo.

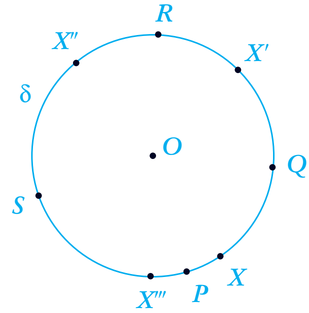
(C) Sia $EFGH$ un quadrilatero inscritto in δ e sia $E'F'G'H'$ il suo derivato, come in figura, nell'ipotesi che quest'ultimo sia un rettangolo.



La diagonale $E'G'$ del rettangolo è un diametro di δ. Poiché $\overset{\frown}{EE'} = \overset{\frown}{E'F}$ (E' è il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{EF}$) e $\overset{\frown}{GG'} = \overset{\frown}{G'H}$ (G' è il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{GH}$), si ha $\overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{HE}$, da cui segue l'uguaglianza delle corde FG e HE.
Allo stesso modo, considerando il diametro $F'H'$, si trova che $EF = GH$.
In conclusione, il quadrilatero $EFGH$, inscritto in δ, deve avere i lati opposti uguali, ossia deve già essere un rettangolo. In tal caso, è immediato constatare che il suo derivato $E'F'G'H'$ è in effetti un quadrato.

(D) Sia $EFGH$ un quadrilatero inscritto in δ e sia $E'F'G'H'$ il suo derivato, come nella figura a destra. Facciamo vedere che $\overset{\frown}{E'F'} + \overset{\frown}{G'H'} = \overset{\frown}{F'G'} + \overset{\frown}{H'E'}$. Questo è immediato, dal momento che, per costruzione, si ha $\overset{\frown}{EE'} = \overset{\frown}{E'F}$, $\overset{\frown}{FF'} = \overset{\frown}{F'G}$, $\overset{\frown}{GG'} = \overset{\frown}{G'H}$, $\overset{\frown}{HH'} = \overset{\frown}{H'E}$. Ciò prova che, se il quadrilatero $\mathcal{K}$ è il derivato di un quadrilatero inscritto in δ, allora gli archi sottesi dai lati opposti di $\mathcal{K}$ hanno somma pari alla metà di δ.





Per dimostrare il viceversa, consideriamo un quadrilatero $PQRS$ inscritto in δ, tale che $\overparen{PQ}+\overparen{RS} = \overparen{QR}+\overparen{SP}$. Cerchiamo un quadrilatero $\mathcal{H}$ inscritto in δ il cui derivato sia $PQRS$. Osserviamo che, una volta assegnato un vertice X per $\mathcal{H}$ (ad esempio un punto interno all'arco $\overparen{PQ}$), tutti gli altri vertici di $\mathcal{H}$ sono univocamente determinati: un secondo vertice X' dovrà essere il simmetrico di X rispetto al raggio OQ, un altro vertice X'' dovrà essere il simmetrico di X' rispetto al raggio OR e l'ultimo vertice X''' dovrà essere il simmetrico di X'' rispetto al raggio OS.

Preso un punto X interno all'arco $\overparen{PQ}$, la procedura descritta conduce alla costruzione di un quadrilatero $XX'X''X'''$ il cui derivato è $PQRS$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

– il quadrilatero $XX'X''X'''$ non si intreccia, ossia $X' \in \overparen{QR}$, $X'' \in \overparen{RS}$, $X''' \in \overparen{SP}$;
– il simmetrico di X''' rispetto al raggio OP è proprio il punto iniziale X.

La seconda condizione discende dal fatto che $\overparen{PQ}+\overparen{RS} = \overparen{QR}+\overparen{SP}$. Indicando con p, q, r, s le misure (orientate) degli archi $\overparen{PQ}, \overparen{QR}, \overparen{RS}, \overparen{SP}$ rispettivamente (in modo che $p + r = q + s$, una semicirconferenza) e con x la misura (orientata nello stesso verso) di $\overparen{PX}$, si ha infatti:

$$\overparen{PX'} = p+(p-x) = 2p-x,$$
$$\overparen{PX''} = p+q+(q-(p-x)) = 2q+x,$$
$$\overparen{PX'''} = p+q+r+(r-(q-(p-x))) = 2(p+r)-x.$$

Visto che $2(p + r)$ corrisponde all'intera circonferenza, X''' è il simmetrico di X rispetto a OP.

Per quanto riguarda la prima condizione (il fatto che $XX'X''X'''$ non si intrecci), possiamo supporre che l'arco $\overparen{PQ}$ sia minimo tra quelli sottesi dai lati del quadrilatero $PQRS$. In tal caso si avrà $X' \in \overparen{QR}$ e $X''' \in \overparen{SP}$. Ne segue che deve essere anche $X'' \in \overparen{RS}$, giacché R è il punto medio dell'arco $\overparen{X'X''}$ e S è il punto medio dell'arco $\overparen{X''X'''}$.

Si è quindi mostrato come la scelta di un qualsiasi punto X nel più piccolo degli archi della circonferenza δ sottesi dai lati del quadrilatero $PQRS$ dà luogo ad un quadrilatero, inscritto in δ, avente X tra i suoi vertici e $PQRS$ come derivato.

Paolo Francini
Liceo Scientifico «Tullio Levi Civita», Roma
paolo.francini@istruzione.it